

Autour de certains espaces de polynômes harmoniques

Jean-Christophe Aval

Petite École de Combinatoire
LaBRI

Automne 2002

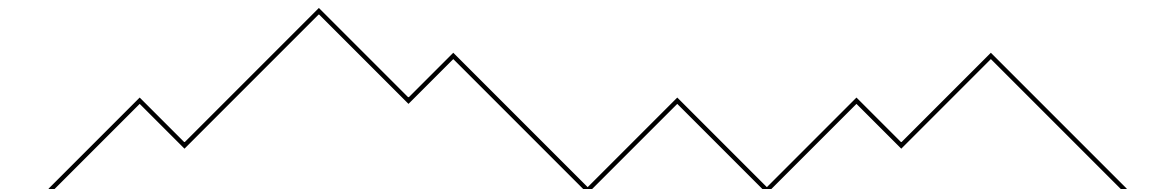
http://dept-info.labri.fr/~aval/PEC_HARMONIC/

$$\partial x_2 \Delta_3 = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 2 & 5 & 7 \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\sigma = (36)(29)(17458)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 12 & 4 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 9 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 18 & 9 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{20} \\ a_{11} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



PLAN

1. Généralités
2. S_n -harmoniques
3. Cas d'autres groupes
4. Harmoniques diagonales
5. Super-harmoniques

Résumé de l'exposé 1

$$\mathbb{Q}[X_n] \quad X_n^{\mathbf{p}} = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}$$

$$\text{idéal } I = (f_1, \dots, f_k)$$

$$\text{quotient } \mathbb{Q}[X_n]/I$$

$$\langle P, Q \rangle = L_0(P(\partial)Q)$$

$$I^\perp \simeq \mathbb{Q}[X_n]/I$$

Résumé de l'exposé 2

- **Bases de Gröbner :**

Ordre lexicographique : $x_1^2 x_2 x_3 > x_1^2 x_3^2$; $\text{LM}(P)$

Base de Gröbner $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_k\}$ de I :

$$\forall P \in I, \exists i, \text{LM}(g_i) \mid \text{LM}(P)$$

Base du quotient : $\mathcal{B} = \{X_n^{\mathbf{p}} / \forall i, \text{LM}(g_i) \nmid X_n^{\mathbf{p}}\}$

Critère (et algorithme) de Buchberger

- **\mathcal{S}_n -harmoniques :**

$$(1, 3).(x_1^2 x_2 + x_3^3) = x_3^2 x_2 + x_1^3 ; \text{Sym}_n ;$$

bases p_k, e_k, h_k

$$\mathcal{I}_n = \left(e_1(X_n), \dots, e_n(X_n) \right)$$

$$Q_n = \mathbb{Q}[X_n] / \mathcal{I}_n \simeq \mathcal{I}_n^\perp = \mathbf{H}_n$$

$$\dim Q_n = \dim \mathbf{H}_n = \text{card } \mathcal{S}_n = n!$$

Résumé de l'exposé 3

- Polynômes de Schubert :

$$\mathfrak{S}_v = \partial_{v^{-1}\omega_0}(X_n^\delta)$$

$\{\mathfrak{S}_v, v \in \mathcal{S}_n\}$ est une base de $Q_n = \mathbb{Q}[X_n]/\mathcal{I}_n$

- Monômes de descente :

$$\sigma = 251349768 \quad M_\sigma = x_2^3 x_5^3 x_1^2 x_3^2 x_4^2 x_9^2 x_7$$

$\{M_\sigma, \sigma \in \mathcal{S}_n\}$ est une base de $Q_n = \mathbb{Q}[X_n]/\mathcal{I}_n$

- L'espace harmonique : $\mathbf{H}_n = \mathcal{I}_n^\perp$

$$P \in \mathbf{H}_n \iff \forall k (\partial x_1^k + \dots + \partial x_n^k)P = 0$$

$$\Delta_3(X_3) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{H}_n = L_\partial[\Delta_n]$$

Résumé de l'exposé 4

- Généralités sur les représentations :

$$\rho : G \longrightarrow GL(\mathbf{V})$$

$$\rho(st) = \rho(s)\rho(t)$$

Notation : $s.x = \rho(s)(x)$

Exemple : $\sigma.P(x_1, \dots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.

Somme directe, représentation irréductible.

Rep. régulière : $s.e_t = e_{st}$; $\sum n_i^2 = |G|$.

- Cas du groupe symétrique

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \Delta_T(X_5) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 1 & x_5 \end{vmatrix}$$

$$S^\lambda = \mathcal{L}[\Delta_T(X_n) ; T \text{ standard de forme } \lambda]$$

$$\dim S^\lambda = f_\lambda ; \sum f_\lambda^2 = n!$$

Résumé de l'exposé 5

- Harmoniques orbitales :

$$\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n, a_i \text{ distincts}$$

$$\text{Orbite : } [\alpha] = \{\sigma.\alpha, \sigma \in \mathcal{S}_n\}$$

$$I[\alpha] = \{P \in \mathbb{Q}[X_n] / P(\beta) = 0 \quad \forall \beta \in [\alpha]\}$$

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[X_n]/I[\alpha]$$

Interpolation multivariée

$$\mathbb{Q}[\alpha] \simeq \text{représentation régulière de } \mathcal{S}_n$$

- $Q_n \simeq \mathbb{Q}[\alpha]$

$$\mathbf{H}_n \simeq Q_n \simeq \text{représentation régulière de } \mathcal{S}_n$$

Résumé de l'exposé 6

B_n : groupe des permutations signées

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & -5 & -2 & 4 \end{bmatrix} \in B_5$$

Action sur $\mathbb{Q}[X_n]$

Polynômes invariants : $Inv_{n,2} = Sym_n(X_n^2)$

$$\dim Q_{n,2} = \dim \mathbf{H}_{n,2} = \text{card} B_n = 2^n n!$$

$$D = \{0, 2, 3\} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \longrightarrow \Delta_D(X_3) = \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}$$

Opérateurs de sauts : $p_k(\partial X_n)$ et $e_k(\partial X_n)$

$$\Delta_{n,2} = \Delta \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{H}_{n,2} = \mathcal{L}_\partial[\Delta_{n,2}]$$

Résumé de l'exposé 7

Action *diagonale* de \mathcal{S}_n sur $\mathbb{Q}[X_n, Y_n]$:

$$\sigma.P(X_n, Y_n) = P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n)}).$$

$$DSym_n \quad p_{1,3}(X_3, Y_3) = x_1 y_1^3 + x_2 y_2^3 + x_3 y_3^3$$

Idéal \mathcal{DI}_n ; quotient DQ_n ; harmoniques \mathbf{DH}_n

$$\dim \mathbf{DH}_n = (n + 1)^{n-1}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 2 & 3 & 1 & \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicité bigraduée de la représentation alter-

nante $S^{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}}$

$\longrightarrow c_n(q, t)$: q, t -nombres de Catalan

Lien avec la conjecture $n!$:

$$\forall \mu \vdash n, \quad \mathbf{H}_\mu \subset \mathbf{DH}_n$$