

## 5 Super-harmoniques

**Définition 115**  $P \in \mathbb{Q}[X_n]$  est *quasi-symétrique* si  $\forall k \leq n, \forall (a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ ,

$$[x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_k}^{a_k}]P = [x_{j_1}^{a_1} \cdots x_{j_k}^{a_k}]P$$

dès que  $i_1 < \cdots < i_k$  et  $j_1 < \cdots < j_k$ .

Notons  $QSym_n$  leur ensemble.

**Remarque 116** Il est clair que  $Sym_n \subset QSym_n$ ,  
mais (n=3)

$$x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 \in QSym_n \setminus Sym_n.$$

$$[2,1,0]+[2,0,1]+[0,2,1]$$

**Définition 117** Pour  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$  une composition de  $|\alpha| = k \geq 0$ , on définit :

$$M_\alpha(X_n) = \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_l}^{\alpha_l}$$

et

$$F_\alpha(X_n) = \sum_{\beta \succeq \alpha} M_\beta(X_n).$$

**Exemple 118**  $n = 3, \alpha = (1, 2)$  :

$$M_\alpha = x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2$$

$$\begin{aligned} F_\alpha &= M_{(1,2)} + M_{(1,1,1)} \\ &= x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 + x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

**Exemple 119**

$$\begin{aligned} F_{(3,2)} &= M_{(3,2)} + M_{(1,2,2)} + M_{(2,1,2)} + M_{(1,1,1,2)} \\ &+ M_{(3,1,1)} + M_{(1,2,1,1)} + M_{(2,1,1,1)} + M_{(1,1,1,1,1)}. \end{aligned}$$

**Proposition 120** *Les fonctions  $F_\alpha$  vérifient les relations de récurrence suivantes :*

*pour  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ ,*

$$F_\alpha(X_n) = \begin{cases} x_1 F_{(\alpha_1-1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}(x_1, \dots, x_n) \\ \quad + F_\alpha(x_2, \dots, x_n) & \text{si } \alpha_1 > 1, \\ x_1 F_{(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)}(x_2, \dots, x_n) \\ \quad + F_\alpha(x_2, \dots, x_n) & \text{si } \alpha_1 = 1. \end{cases}$$

**Exemple 121**  $n = 3$ ,

$$\begin{aligned} F_{(2,1)}(X_3) &= x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3 \\ &= x_1(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) + x_2^2 x_3 \\ &= x_1 F_{(1,1)}(x_1, x_2, x_3) + F_{(2,1)}(x_2, x_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{(1,2)}(X_3) &= x_1 x_2^2 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 \\ &= x_1(x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2) + x_2 x_3^2 \\ &= x_1 F_{(2)}(x_2, x_3) + F_{(1,2)}(x_2, x_3) \end{aligned}$$

## Espace Super-Harmonique

$$\mathcal{SI}_n = \left( F_\alpha, |\alpha| > 0 \right).$$

**Définition 122** On définit le quotient

$$SQ_n = \mathbb{Q}[X_n] / \mathcal{SI}_n,$$

et l'espace *super-harmonique*

$$\begin{aligned} \mathbf{SH}_n &= \mathcal{SI}_n^\perp \\ &= \{ P \in \mathbb{Q}[X_n] / \forall |\alpha| > 0, F_\alpha(\partial)P = 0 \}. \end{aligned}$$

**Remarque 123**

$$Sym_n \subset QSym_n \implies \mathbf{SH}_n \subset \mathbf{H}_n.$$

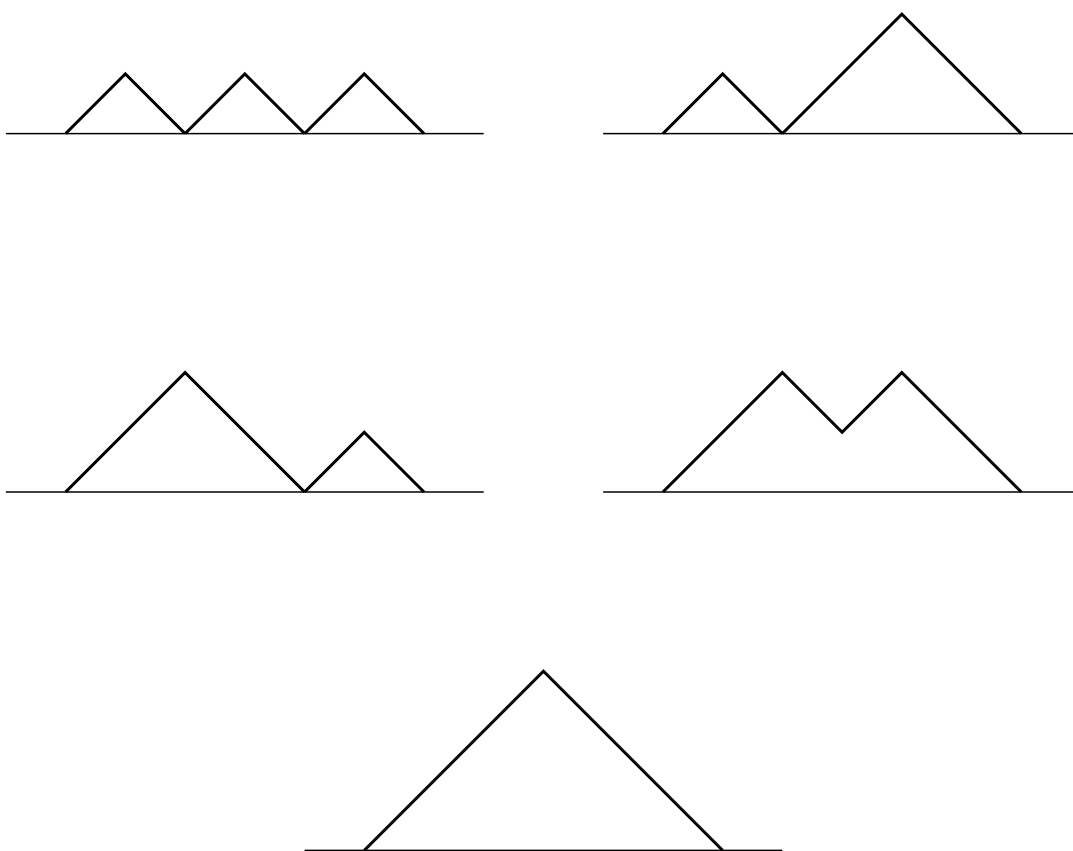
# Nombres de Catalan

Les nombres de Catalan

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

énumèrent (entre autres !) les chemins de Dyck.

**Exemple 124**  $n = 3$ ,  $C_3 = 5$



**Théorème 125** *La dimension de l'espace superharmonique est donnée par*

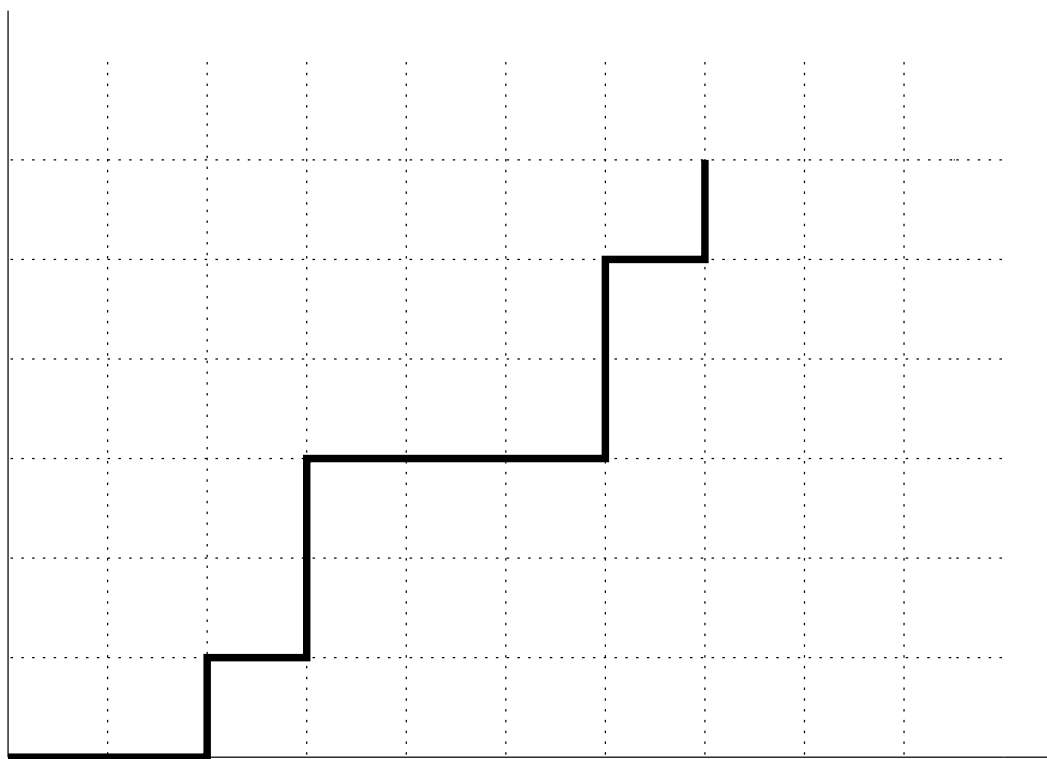
$$\dim \mathbf{SH}_n = \dim SQ_n = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

## Correspondance entre éléments de $\mathbb{N}^n$ et chemins

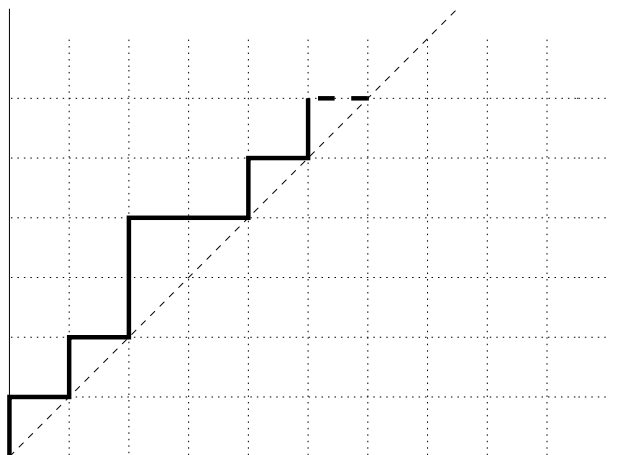
**Exemple 126** Pour  $n = 6$ , on associe à

$$\epsilon = (2, 1, 0, 3, 0, 1)$$

le chemin  $P_\epsilon$  suivant :

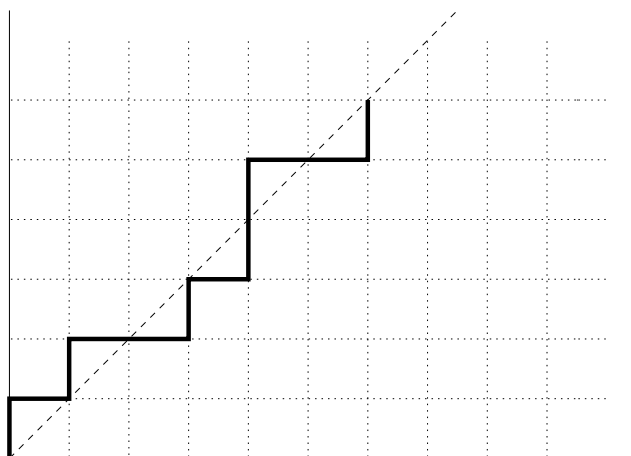


Chemin de Dyck :



$$\epsilon = (0, 1, 1, 0, 2, 1)$$

Chemin transdiagonal :



$$\epsilon = (0, 1, 2, 1, 0, 2)$$



**Théorème 127** *L'ensemble de monômes*

$$\{X_n^\eta / \eta \text{ de Dyck}\}$$

*est une base de  $SQ_n$ .*

### Exemple 128 ( $n = 3$ )

$$F_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

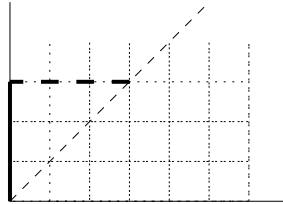
$$\begin{aligned} F_2 &= x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 \\ &= x_1(x_1 + x_2 + x_3) + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 \\ &\equiv x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{12} &= x_1x_2^2 + x_1x_2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 \\ &= x_1(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2) + x_2x_3^2 \\ &\equiv x_2x_3^2 \end{aligned}$$

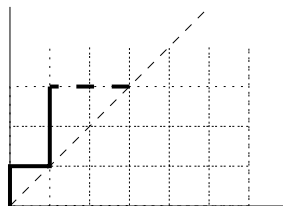
$$\begin{aligned} F_3 &= x_1F_2(x_1, x_2, x_3) + F_3(x_2, x_3) \\ &\equiv x_2^3 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^3 \\ &\equiv x_2(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2) + x_3^3 \\ &\equiv x_3^3 \end{aligned}$$

Les monômes non divisibles par  $\{x_1, x_2^2, x_2x_3, x_3^3\}$   
sont :

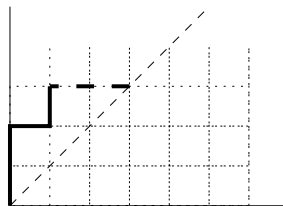
$1$



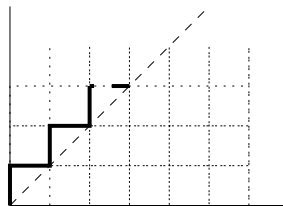
$x_2$



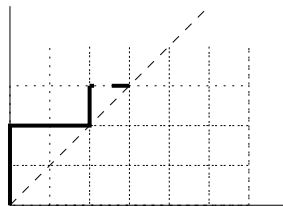
$x_3$



$x_2 x_3$



$x_3^2$



## Construction de $\mathcal{G}$

On construit une famille de polynômes

$$\mathcal{G} = \{G_\epsilon \in Q[X_n] ; \epsilon \text{ transdiagonal}\} \subset \mathcal{SI}_n$$

par récurrence sur la longueur de  $\epsilon$  :

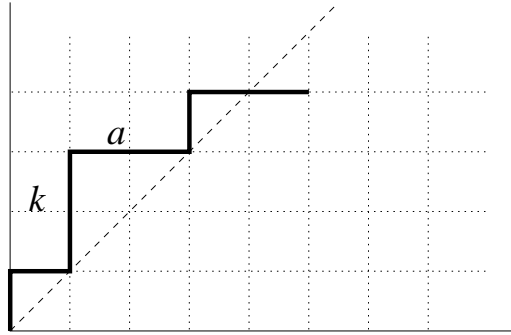
- si  $\epsilon = \alpha 0^*$ , alors  $G_\epsilon = F_\alpha$  ;
- sinon, on regarde le zéro le plus à droite :

$$\epsilon = \eta 0 a \beta 0^* = \eta 0 a \beta,$$

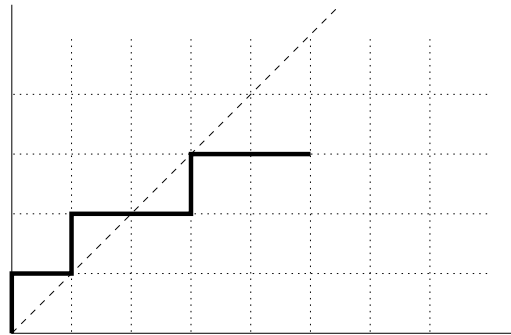
et on pose (pour 0 en place  $k$ ) :

$$G_\epsilon = G_{\eta a \beta} - x_k G_{\eta (a-1) \beta}.$$

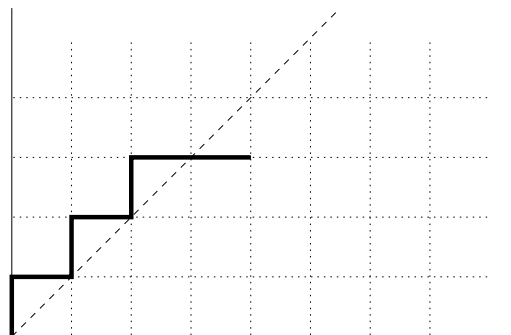
$$\varepsilon = \eta_0 a \beta$$



$$\eta a \beta$$



$$\eta(a-1)\beta$$



## Exemple 129

$$\begin{aligned}G_{1020} &= G_{1200} - x_2 G_{1100} \\&= F_{12}(x_1, x_2, x_3, x_4) - x_2 F_{11}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\&= x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_1 x_4^2 + x_2 x_3^2 + x_2 x_4^2 \\&\quad + x_3 x_4^2 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 \\&\quad + x_2 x_3 x_4 - x_2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 \\&\quad + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4) \\&= x_1 x_3^2 + x_1 x_3 x_4 + x_1 x_4^2 - x_2^2 x_3 - x_2^2 x_4 \\&\quad + x_2 x_3^2 + x_2 x_4^2 + x_3 x_4^2\end{aligned}$$

**Proposition 130** *Le monôme dominant de  $G_\epsilon$  pour l'ordre lexicographique est :*

$$LM(G_\epsilon) = X_n^\epsilon.$$

**Remarque 131** Ceci implique que :

$$\dim SQ_n \leq C_n.$$

**Proposition 132** *La famille  $\mathcal{G}$  est une base de Gröbner de  $SI_n$ , ce qui implique les Théorèmes 125 et 127.*

## Proposition 133

### Deuxième lemme de Buchberger

Soit  $\mathcal{G} \subset \mathbb{Q}[X_n]$ .

$\overline{S(P, Q)}^{\mathcal{G}} = 0$  dès qu'il existe  $R \in \mathcal{G}$  tel que

- $LM(R) \mid PPCM(LM(P), LM(Q))$
- $\overline{S(R, P)}^{\mathcal{G}} = 0$  et  $\overline{S(R, Q)}^{\mathcal{G}} = 0$



$$S(G_{0301}, G_{0132})$$

↓

$$S(G_{0332}, G_{0301})$$

$$S(G_{0332}, G_{0132})$$

↓

$$S(G_{0332}, G_{0322})$$

$$S(G_{0322}, G_{0312})$$

$$S(G_{0312}, G_{0302})$$

$$S(G_{0302}, G_{0301})$$

↓

$$S(G_{0332}, G_{0232})$$

$$S(G_{0232}, G_{0132})$$

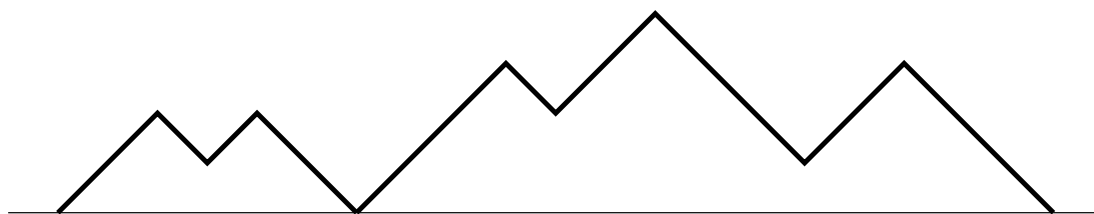
$$\begin{aligned} S(G_{0322}, G_{0312}) &= G_{0322} - x_3 G_{0312} \\ &= G_{03022} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(G_{302}, G_{202}) &= G_{302} - x_1 G_{202} \\ &= (G_{32} - x_2 G_{31}) - x_1 (G_{22} - x_2 G_{21}) \\ &= (G_{32} - x_1 G_{22}) - x_2 (G_{31} - x_1 G_{21}) \\ &= G_{032} - x_2 G_{031} \end{aligned}$$

## Série de Hilbert

$$\mathbf{SH}_n^{(k)} = \mathbf{SH}_n \cap \mathbb{Q}_k[X_n].$$

Notons  $C_n^{(k)}$  le nombre de chemins de Dyck de longueur  $2n$  et finissant par  $k$  pas descendants.

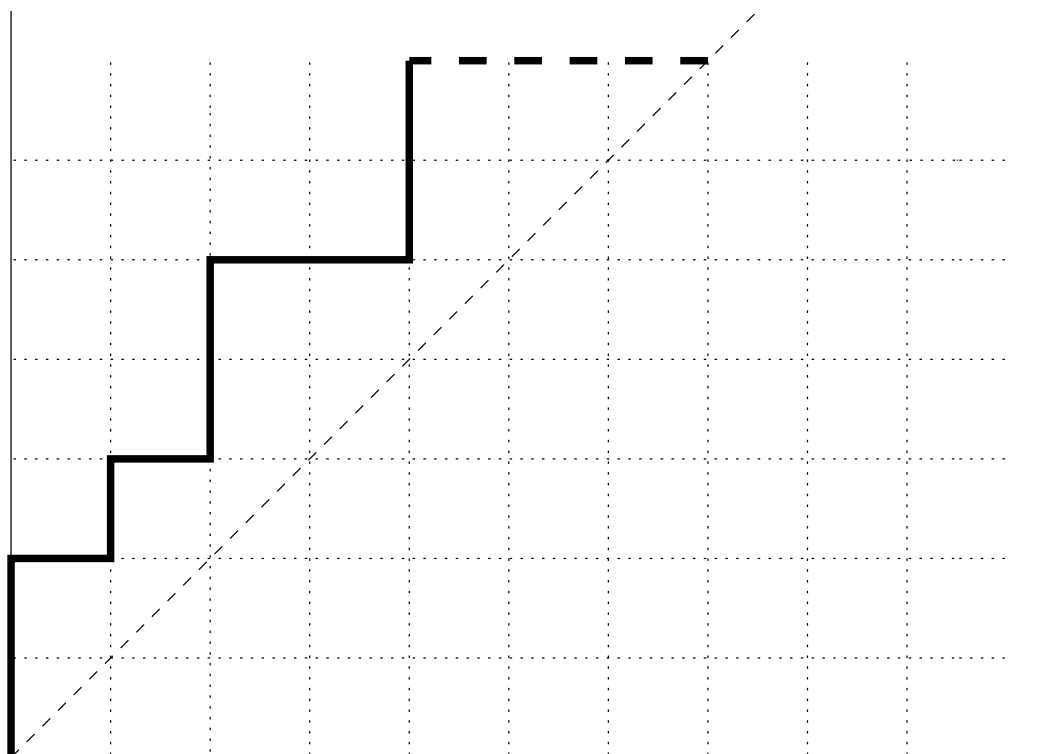


Un chemin de Dyck de longueur 20 finissant par 3 pas descendants.

### Théorème 134

$$\dim \mathbf{SH}_n^{(k)} = C_n^{(n-k)}.$$

**Exemple 135** Pour  $n = 7$ , le chemin



est associé au monôme  $x_3x_4x_6^2$  de degré  $4 = 7 - 3$ .

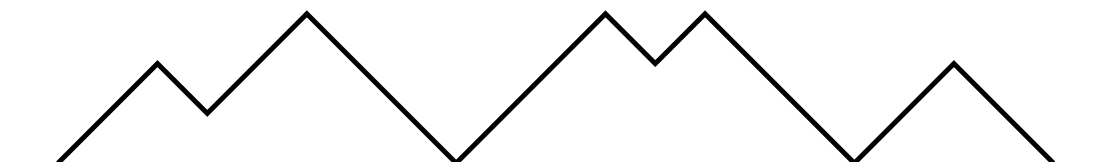
$$F_n(t) = \sum_{k \geq 0} \dim \mathbf{SH}_n^{(k)} t^k.$$

$n$	$F_n(t)$
1	1
2	$1 + t$
3	$1 + 2t + 2t^2$
4	$1 + 3t + 5t^2 + 5t^3$
5	$1 + 4t + 9t^2 + 14t^3 + 14t^4$
6	$1 + 5t + 14t^2 + 28t^3 + 42t^4 + 42t^5$
7	$1 + 6t + 20t^2 + 48t^3 + 90t^4 + 132t^5 + 132t^6$

### Remarque 136

$C_n^{(k)}$  est aussi le nombre de chemins de Dyck de longueur  $2n$  et composés de  $k$  facteurs et

$$C_n^{(k)} = \frac{k(2n - k - 1)!}{n!(n - k)!}.$$



Un chemin de Dyck de longueur 20 composé de  
3 facteurs.

# Bijection

