

## 4 Harmoniques diagonales

$\mathbb{Q}[X_n, Y_n]$  : polynômes en deux alphabets  $X_n$  et  $Y_n$ .

$\mathcal{S}_n$  agit *diagonalement* sur  $\mathbb{Q}[X_n, Y_n]$  par :

$$\sigma.P(X_n, Y_n) = P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n)}).$$

$$(1, 3).(x_1y_2^2 + x_2^3y_3 - x_3y_3) = x_3y_2^2 + x_2^3y_1 - x_1y_1$$

**Définition 98**  $P \in \mathbb{Q}[X_n, Y_n]$  est dit *diagonalement symétrique* si

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \quad \sigma.P = P.$$

$DSym_n$  : ensemble des polynômes diagonalement symétriques

Base :

$$p_{h,k}(X_n, Y_n) = \sum_{i=1}^n x_i^h y_i^k$$

$$p_{2,3}(X_4, Y_4) = x_1^2 y_1^3 + x_2^2 y_2^3 + x_3^2 y_3^3 + x_4^2 y_4^3$$

$$\mathcal{DI}_n = \left( p_{h,k}(X_n, Y_n) , \quad h + k > 0 \right)$$

$$DQ_n = \mathbb{Q}[X_n, Y_n]/\mathcal{DI}_n$$

$$\mathbf{DH}_n = \mathcal{DI}_n^\perp$$

**Théorème 99 (conjecture  $(n + 1)^{n-1}$ )**

$$\dim \mathbf{DH}_n = (n + 1)^{n-1}$$

### Remarque 100

$DSym_n(X_n, Y_n)$  contient les polynômes symétriques en  $X_n$  ET en  $Y_n$ .

$$\begin{aligned} &x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 \\ &\quad + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3 \end{aligned}$$

Mais l'inclusion est stricte :

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \in DSym_3.$$

$$J_n = \left( e_1(X_n), \dots, e_n(X_n), e_1(Y_n), \dots, e_n(Y_n) \right)$$

Base de Gröbner de  $J_n$  :

$$\begin{aligned} &\{h_1(X_n), h_2(X_n^{(-1)}), h_3(X_n^{(-2)}), \dots, h_n(X_n^{(-(n-1))}), \\ &\quad h_1(Y_n), h_2(Y_n^{(-1)}), h_3(Y_n^{(-2)}), \dots, h_n(Y_n^{(-(n-1))})\} \end{aligned}$$

$$\dim \mathbb{Q}[X_n, Y_n]/J_n = (n!)^2 \geq \dim DQ_n.$$

$$\pi_{h,k} : \mathbb{Q}[X_n, Y_n] \longrightarrow \mathbb{Q}[X_n, Y_n]$$

$$X_n^{\mathbf{p}} Y_n^{\mathbf{q}} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (|\mathbf{p}|, |\mathbf{q}|) \neq (h, k), \\ X_n^{\mathbf{p}} Y_n^{\mathbf{q}} & \text{si } (|\mathbf{p}|, |\mathbf{q}|) = (h, k). \end{cases}$$

### Définition 101

Pour  $\mathbf{V} \subseteq \mathbb{Q}[X_n, Y_n]$ , on définit la *série de Hilbert bigraduée*

$$F_{\mathbf{V}}(q, t) = \sum_{h,k} \dim \pi_{h,k}(\mathbf{V}) q^h t^k.$$

### Exemple 102

$$F_{\mathbb{Q}[X_n, Y_n]} = \frac{1}{(1-q)^n (1-t)^n}$$

On représente les séries de Hilbert matriciellement :

$$F = 1 + 3q + 2t + 4q^2 + 3qt + 3t^2 + q^3$$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & & & \\ 2 & 3 & & \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

### Exemple 103 *Matrice de Hilbert*

$$\mathcal{H}_n(q, t) = F_{DQ_n}(q, t)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 2 & 3 & 1 & \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ 3 & 1 & & & & & \\ 5 & 4 & 1 & & & & \\ 6 & 9 & 4 & 1 & & & \\ 5 & 11 & 9 & 4 & 1 & & \\ 3 & 8 & 11 & 9 & 4 & 1 & \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

### Proposition 104

$$\mathcal{H}_n(q, 0) = [n]_q !$$

$$\mathcal{H}_n(0, t) = [n]_t !$$

### Proposition 105

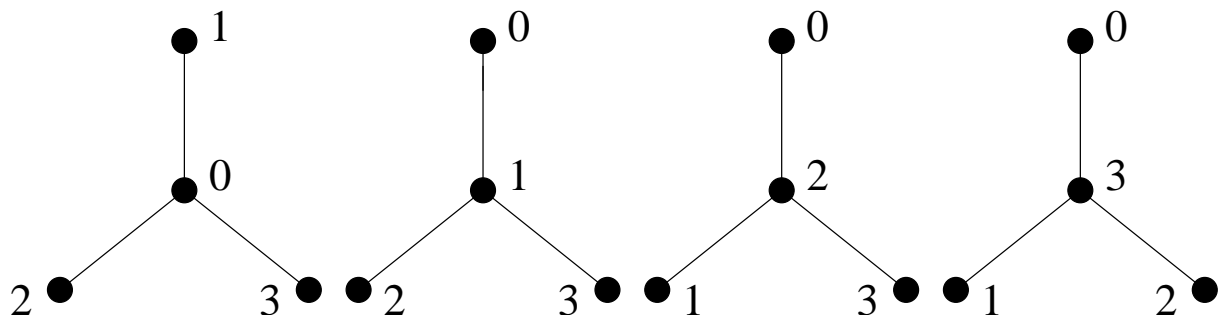
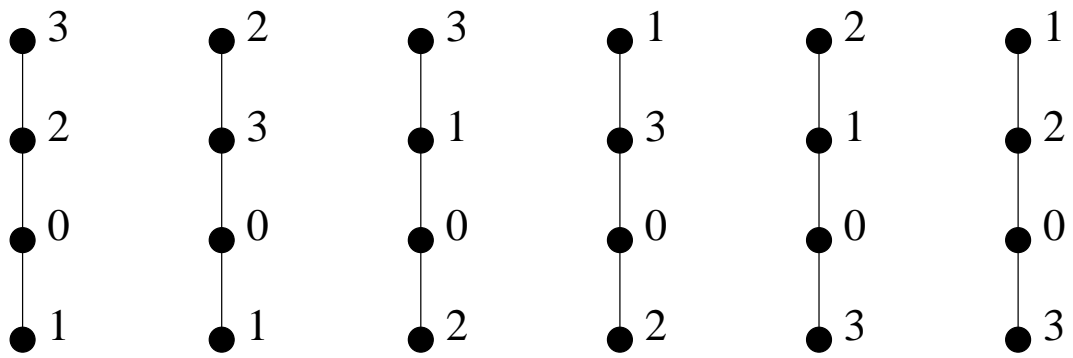
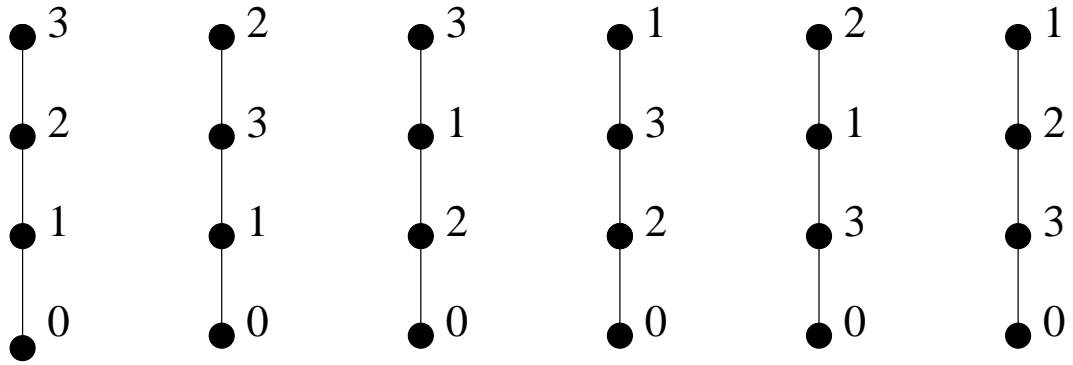
$$q^{\binom{n}{2}} \mathcal{H}_n(q, q^{-1}) = ([n + 1]_q)^{n-1}$$

### Proposition 106

$$\mathbf{H}_n(q, 1) = \sum_T q^{|\text{inv}(T)|}$$

*où la somme est prise sur les arbres étiquetés par  $\{0, 1, \dots, n\}$  et  $|\text{inv}(T)|$  est le nombre d'inversions dans un tel arbre.*

# Exemple 107 ( $n = 3$ )





Le groupe symétrique agit sur  $DQ_n$  :

$$\sigma.P(X_n, Y_n) = P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n)}).$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 2 & 3 & 1 & \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Bidegré (0, 0) :  $S^{\square\square\square}$ .
- Bidegré (1, 0) :  $S^{\square\square}$ .
- Bidegré (1, 1) :  $S^{\square\square} + S^{\square}$ .
- Bidegré (2, 1) :  $S^{\square}$ .

Si on regarde la représentation alternante  $S^{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}}$ ,  
on a une multiplicité bigraduée :  $c_n(q, t)$ .

$$c_1(q, t) = 1$$

$$c_2(q, t) = q + t$$

$$c_3(q, t) = qt + q^3 + q^2t + qt^2 + t^3$$

$$\begin{aligned} c_4(q, t) &= q^3t + q^2t^2 + qt^3 \\ &\quad + q^4t + q^3t^2 + q^2t^3 + qt^4 \\ &\quad + q^6 + q^5t + q^4t^2 + q^3t^3 + q^2t^4 + qt^5 + t^6 \end{aligned}$$

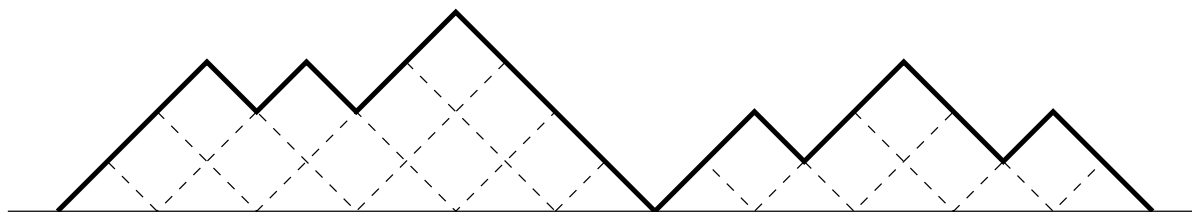
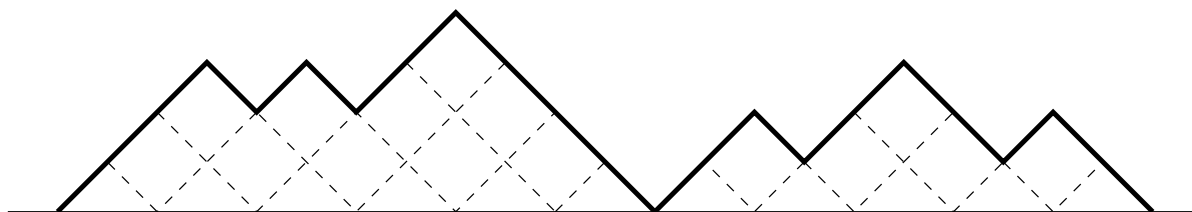
On observe que :

$$c_n(1, 1) = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

## Théorème 108

$$c_n(q, t) = \sum_{\pi \in D_n} q^{a(\pi)} t^{p(\beta(\pi))}$$

## Exemple 109 ( $n = 11$ )



# Lien avec la conjecture $n!$

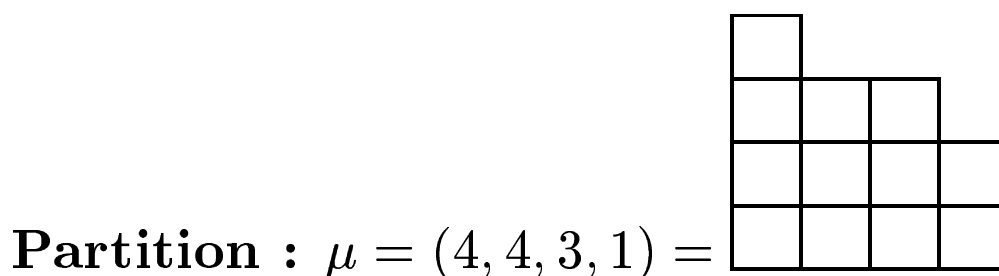
	2,1		2,3
		1,2	
0,0	0,1		

Diagramme :  $L =$  (n = 5 cases)

Déterminant :

$$\Delta_L = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & x_1^2 y_1^3 \\ 1 & y_2 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 & x_2^2 y_2^3 \\ 1 & y_3 & x_3^2 y_3 & x_3 y_3^2 & x_3^2 y_3^3 \\ 1 & y_4 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & x_4^2 y_4^3 \\ 1 & y_5 & x_5^2 y_5 & x_5 y_5^2 & x_5^2 y_5^3 \end{vmatrix} \in \mathbb{Q}[X_n, Y_n]$$

Cône de dérivation :  $\mathbf{H}_L = \mathbb{Q}[\partial X_n, \partial Y_n] \Delta_L$



**Théorème 110 (conjecture  $n!$ )**

$$\dim \mathbf{H}_\mu = n!$$

**Remarque 111**

Pour  $\mu = (1^n)$ ,  $\Delta_\mu = \Delta_n(X_n)$ ,  
 $\mathbf{H}_\mu = \mathbf{H}_n$ .

## Proposition 112

$$\forall \mu \vdash n, \mathbf{H}_\mu \subset \mathbf{DH}_n$$

*Preuve.*

$$p_{h,k}(\partial X_n, \partial Y_n) \Delta_\mu = 0$$

■

### Lemme 113

*L'opérateur de saut  $p_{h,k}(\partial X_n, \partial Y_n)$  fait bouger une case de  $h$  pas vers le bas et de  $k$  pas vers la gauche.*

### Exemple 114

$$p_{2,1}(\partial)\Delta = 0 + 12\Delta + 0 - 2\Delta$$
