

3 Cas d'autres groupes

Définition 77 Le groupe hyperoctaédral B_n est le groupe des permutations signées, *i.e.* le groupe des matrices de pseudo-permutation dont les entrées non nulles sont 1 ou -1 .

Exemple 78

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & -5 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\in B_5$

Proposition 79

$$\text{card } B_n = 2^n n!$$

Définition 80 B_n agit sur $\mathbb{Q}[X_n]$ par :

$$g.P(X_n) = P(g.X_n).$$

Exemple 81 (n=4)

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = x_1x_2^2 - x_2x_3 - 2x_3^3x_4$$

$$g.P = -x_4x_2^2 + x_2x_1 + 2x_1^3x_3$$

Définition 82 *polynômes invariants :*

$$P \in \text{Inv}_{n,2} \iff \forall g \in B_n, \quad g.P = P$$

Proposition 83

$$P \in \text{Inv}_{n,2} \iff \exists Q \in \text{Sym}_n / P(X_n) = Q(X_n^2)$$

Exemple 84

$$Q(X_3) = e_2(X_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

$$Q(X_3^2) = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2$$

Définition 85 On définit l'*espace covariant* :

$$Q_{n,2} = \mathbb{Q}[X_n] / (e_1(X_n^2), \dots, e_n(X_n^2))$$

et l'espace harmonique correspondant :

$$\mathbf{H}_{n,2} = (e_1(X_n^2), \dots, e_n(X_n^2))^\perp.$$

Théorème 86

$$\dim Q_{n,2} = \dim \mathbf{H}_{n,2} = \text{card } B_n = 2^n n!$$

Lemme 87 Soit I un idéal de $\mathbb{Q}[X_n]$

$$I^2 = \{P(X_n^2) , P \in I\}.$$

$\mathcal{G} = \{g_1(X_n), \dots, g_k(X_n)\}$ BdG de I

\Downarrow

$\mathcal{G}^2 = \{g_1(X_n^2), \dots, g_k(X_n^2)\}$ BdG de I^2 .

Preuve. Application du critère de Buchberger :

Si $\forall i \neq j , \overline{S(g_i, g_j)}^{\mathcal{G}} = 0,$

alors $\overline{S(g_i(X_n^2), g_j(X_n^2))}^{\mathcal{G}^2} = 0. \blacksquare$

$$\left(\dim Q_{n,2} = 2^n n! \right)$$

Preuve du Théorème 86.

$\{h_1(X_n), h_2(X_n^{(-1)}), \dots, h_n(X_n^{(-(n-1))})\}$ est une BdG de $(e_1(X_n), e_2(X_n), \dots, e_n(X_n))$, donc

$\{h_1(X_n^2), h_2(X_n^{2(-1)}), \dots, h_n(X_n^{2(-(n-1))})\}$ est une BdG de $(e_1(X_n^2), e_2(X_n^2), \dots, e_n(X_n^2))$.

Les monômes dominants sont :

$$x_1^2, x_2^4, x_3^6, \dots, x_n^{2n}.$$

On obtient une base du quotient :

$$\{X_n^\epsilon, \quad 0 \leq \epsilon_i < 2i\}.$$

Définition 88 Pour n fixé, un *diagramme* est un ensemble de n entiers distincts.

Représentation graphique : ($n = 4$)

$$D = \{0, 1, 3, 5\} = \begin{array}{c} \square \\ \otimes \\ \otimes \\ \square \end{array}$$

On lui associe un *déterminant* :

$$\Delta_D(X_4) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 & x_1^5 \\ 1 & x_2 & x_2^3 & x_2^5 \\ 1 & x_3 & x_3^3 & x_3^5 \\ 1 & x_4 & x_4^3 & x_4^5 \end{vmatrix}$$

Remarque 89

Pour $D = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$, $\Delta_D = \Delta_n$ déterminant de Vandermonde.

Opérateurs de sauts.

Exemple 90 ($n = 3$) $D = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}$$

$$= x_2^2 x_3^3 + x_3^2 x_1^3 + x_1^2 x_2^3 - x_3^2 x_2^3 - x_1^2 x_3^3 - x_2^2 x_1^3$$

$$\partial x_1^2 \Delta = 0 + 6x_3^2 x_1 + 2x_2^3 - 0 - 2x_3^3 - 6x_2^2 x_1$$

$$\partial x_2^2 \Delta = 2x_3^3 + 0 + 6x_1^2 x_2 - 6x_3^2 x_2 - 0 - 2x_1^3$$

$$\partial x_3^2 \Delta = 6x_2^2 x_3 + 2x_1^3 + 0 - 2x_2^3 - 6x_1^2 x_3 - 0$$

$$p_2(\partial X_3) \Delta = 0 - 6\Delta_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}} + 0$$

Proposition 91

- $p_k(\partial)$ fait descendre une case de k pas ;
- $e_k(\partial)$ fait descendre k cases de un pas.

Exemple 92

$$p_2(\partial)\Delta = -2\Delta + 20\Delta - 30\Delta$$

Exemple 93

$$e_2(\partial)\Delta = 2\Delta + 5\Delta + 30\Delta$$

Définition 94

$\Delta_{n,2} = \Delta_D$ pour $D = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$.

Exemple 95 ($n = 3$)

$$D = \{1, 3, 5\} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

$$\Delta_{3,2} = \begin{array}{|ccc|} \hline x_1 & x_1^3 & x_1^5 \\ \hline x_2 & x_2^3 & x_2^5 \\ \hline x_3 & x_3^3 & x_3^5 \\ \hline \end{array}$$

Proposition 96

$$\Delta_{n,2} \in \mathbf{H}_{n,2}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \text{Inv}_{n,2} &= (p_1(X_n^2), p_2(X_n^2), \dots, p_n(X_n^2)) \\ &= (p_2(X_n), p_4(X_n), \dots, p_{2n}(X_n)) \end{aligned}$$

$$p_{2k}(\partial X_n) \Delta_{\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array}} = 0$$

■

Théorème 97

$$\mathbf{H}_{n,2} = \mathcal{L}_{\partial}[\Delta_{n,2}]$$

et une base est donnée par

$$\mathcal{B}_{n,2} = \{e_1(\partial X_n)^{\alpha_1} \dots e_n(\partial X_n)^{\alpha_n} \partial X_n^{\epsilon} \Delta_{n,2} \\ / \forall i, 0 \leq \alpha_i < 2, 0 \leq \epsilon_i < i\}$$

Preuve.

Il suffit de montrer que $\mathcal{B}_{n,2}$ est linéairement indépendante.

$$\text{Si } \sum_{P \in \mathcal{B}_{n,2}} c_P P = 0$$

$$(n = 2)$$

$$\begin{aligned}
& (c_1 + c_2 \partial x_2) \Delta \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array} \\
+ & (c_3 + c_4 \partial x_2) e_1(\partial) \Delta \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array} \\
+ & (c_5 + c_6 \partial x_2) e_2(\partial) \Delta \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array} \\
+ & (c_7 + c_8 \partial x_2) e_1(\partial) e_2(\partial) \Delta \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array} \\
= & 0
\end{aligned}$$

$$e_2(\partial) \Delta \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array} = \Delta \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array}$$

$$e_1(\partial) e_2(\partial) \Delta \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array} = \Delta \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array}$$