

2 S_n -harmoniques

S_n agit sur $\mathbb{Q}[X_n]$ par :

$$\sigma.P(x_1, \dots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Exemple 43

$$(13).(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 - x_3^3) = x_3^2 x_2 + x_2^2 x_1 - x_1^3$$

Définition 44 $P \in \mathbb{Q}[X_n]$ est dit *symétrique* si

$$\forall \sigma \in S_n, \quad \sigma.P = P.$$

Bases

$$p_2(X_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$e_2(X_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

$$h_2(X_3) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$$

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \quad e_\lambda = e_{\lambda_1} \times \dots \times e_{\lambda_k}$$

$$\mathcal{I}_n = (\text{Sym}_n^+) = (e_1(X_n), e_2(X_n), \dots, e_n(X_n))$$

Définition 45

$$\mathbf{H}_n = \mathcal{I}_n^\perp : \text{espace } S_n\text{-harmonique}$$

$$Q_n = \mathbb{Q}[X_n]/\mathcal{I}_n \simeq \mathbf{H}_n$$

$$P \in \mathbf{H}_n \iff \begin{cases} (\partial x_1 + \cdots + \partial x_n)P = 0 \\ (\partial x_1^2 + \cdots + \partial x_n^2)P = 0 \\ \dots \\ (\partial x_1^n + \cdots + \partial x_n^n)P = 0 \end{cases}$$

Théorème 46

$$\dim \mathbf{H}_n = \dim Q_n = n!$$

Preuve. (Bases de Gröbner) ($n = 4$)

$$h_1(X_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$h_2(X_4) = x_1 h_1(X_4) + h_2(x_2, x_3, x_4)$$

$$\equiv h_2(x_2, x_3, x_4)$$

$$h_3(X_4) = x_1 h_2(X_4) + h_3(x_2, x_3, x_4)$$

$$\equiv h_3(x_2, x_3, x_4)$$

$$= x_2 h_2(x_2, x_3, x_4) + h_3(x_3, x_4)$$

$$\equiv h_3(x_3, x_4)$$

$$h_4(X_4) = x_1 h_3(X_4) + h_4(x_2, x_3, x_4)$$

$$\equiv h_4(x_2, x_3, x_4)$$

$$= x_2 h_3(x_2, x_3, x_4) + h_3(x_3, x_4)$$

$$\equiv h_4(x_3, x_4)$$

$$= x_3 h_3(x_3, x_4) + h_4(x_4)$$

$$\equiv h_4(x_4)$$

$$\mathcal{I}_4 = (h_1(X_4), h_2(X_4^{(-1)}), h_3(X_4^{(-2)}), h_4(X_4^{(-3)}))$$

$$\mathcal{I}_n = (h_1(X_n), h_2(X_n^{(-1)}), \dots, h_n(X_n^{(-(n-1))}))$$

Les monômes dominants sont : x_1, x_2^2, \dots, x_n^n .

C'est (donc) une base de Gröbner de \mathcal{I}_n .

Une base du quotient est donnée par :

$$\mathcal{A}_n = \{X_n^\epsilon, \quad 0 \leq \epsilon_i \leq i - 1\}$$

(monômes d'Artin)

Corollaire 47 *La série de Hilbert de \mathbf{H}_n est :*

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{H}_n}(q) &= 1(1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+\cdots+q^{n-1}) \\ &= [n!]_q. \end{aligned}$$

Les monômes de descente.

Définition 48 À $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on associe son *monôme de descente* :

$$M_\sigma = \prod_{i/\sigma_i > \sigma_{i+1}} (x_{\sigma_1} x_{\sigma_2} \cdots x_{\sigma_i}).$$

Exemple 49 $\sigma = 251349768$

$$\begin{aligned} M_\sigma &= (x_2 x_5)(x_2 x_5 x_1 x_3 x_4 x_9)(x_2 x_5 x_1 x_3 x_4 x_9 x_7) \\ &= x_2^3 x_5^3 x_1^2 x_3^2 x_4^2 x_9^2 x_7 \end{aligned}$$

Théorème 50

$$\{M_\sigma, \sigma \in \mathcal{S}_n\}$$

est une base de $Q_n = \mathbb{Q}[X_n]/\mathcal{I}_n$.

Les polynômes de Schubert

Définition 51 Soit $s_i = (i, i+1) \in \mathcal{S}_n$. L'opérateur de *différence divisée* est

$$\partial_i = (x_i - x_{i+1})^{-1}(1 - s_i)$$

i.e.

$$\partial_i P(X_n) = \frac{P(X_n) - s_i \cdot P(X_n)}{x_i - x_{i+1}}$$

Remarque 52

$$\partial_i P(X_n) \in \mathbb{Q}[X_n] \text{ et } \begin{cases} \partial_i P = 0 \text{ si } s_i \cdot P = P \\ \deg \partial_i P = \deg P - 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Proposition 53

1. $\partial_i^2 = 0$
2. $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ si $|j - i| \geq 2$
3. $\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$

On définit ainsi pour $v \in \mathcal{S}_n$:

$$\partial_v = \partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k}$$

si $v = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ est une expression réduite de v ($k = \ell(v)$, le nombre d'inversions de v).

Proposition 54 *Si $a = a_1 \dots a_l$ n'est pas réduit alors $\partial_a = 0$.*

Corollaire 55 *Pour $u, v \in \mathcal{S}_n$*

$$\partial_u \partial_v = \begin{cases} \partial_{uv} & \text{si } \ell(uv) = \ell(u) + \ell(v), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(Si a n'est pas réduit, $\partial_a = 0$)

Preuve.

Soit i le plus grand entier tel que $a_1 \dots a_i$ soit réduit, u la permutation correspondante.

Posons $v = us_{a_{i+1}}$; $\ell(v) = i - 1$.

Si $b_1 \dots b_{i-1}$ est un mot réduit de v alors $b_1 \dots b_{i-1}a_{i+1}$ est un mot réduit de u .

Ainsi :

$$\begin{aligned}\partial_{a_1} \cdots \partial_{a_l} &= \partial_u \partial_{a_{i+1}} \cdots \partial_{a_l} \\ &= \partial_{b_1} \cdots \partial_{b_{i-1}} \partial_{a_{i+1}} \partial_{a_{i+1}} \cdots \partial_{a_l} \\ &= 0\end{aligned}$$

■

$$\delta = (n - 1, n - 2, \dots, 1, 0)$$

$$\omega_0 = n \ n-1 \ \dots \ 2 \ 1$$

Définition 56 Le *polynôme de Schubert* \mathfrak{S}_v est

$$\mathfrak{S}_v = \partial_{v^{-1}\omega_0}(X_n^\delta).$$

Corollaire 57 Pour $u, v \in \mathcal{S}_n$

$$\partial_u \mathfrak{S}_v = \begin{cases} \mathfrak{S}_{vu^{-1}} & \text{si } \ell(vu^{-1}) = \ell(v) - \ell(u), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 58

1. $\mathfrak{S}_{\omega_0} = X_n^\delta$
2. $\mathfrak{S}_{Id} = 1$
3. $\deg \mathfrak{S}_v = \ell(v)$
4. \mathfrak{S}_v est symétrique en $x_i, x_{i+1} \iff v_i < v_{i+1}$
5. $\mathfrak{S}_{s_i} = x_1 + \cdots + x_i$

Preuve.

1., 2., 3. $\deg \mathfrak{S}_v = \frac{n(n-1)}{2} - \ell(v^{-1}\omega_0) = \ell(v)$

4.

$$\begin{aligned} s_i \cdot \mathfrak{S}_v &\iff \partial_i \mathfrak{S}_v = 0 \\ &\iff \ell(vs_i) = \ell(v) + 1 \\ &\iff v_i < v_{i+1} \end{aligned}$$

5. Application de 4.

■

Exemple 59 *Les polynômes de Schubert pour $n = 3$:*

$$\mathfrak{S}_{123} = 1$$

$$\mathfrak{S}_{213} = x_1$$

$$\mathfrak{S}_{132} = x_1 + x_2$$

$$\mathfrak{S}_{231} = x_1 x_2$$

$$\mathfrak{S}_{312} = x_1^2$$

$$\mathfrak{S}_{321} = x_1^2 x_2$$

Théorème 60 *Les polynômes de Schubert \mathfrak{S}_v lorsque v décrit \mathcal{S}_n forment une base de l'espace*

$$\mathcal{L}[X_n^{\mathbf{p}}, \mathbf{p} \leq \delta] = \mathcal{L}[\mathcal{A}_n^*],$$

donc a fortiori une base de $Q_n = \mathbb{Q}[X_n]/\mathcal{I}_n$.

Preuve.

$\forall v \in \mathcal{S}_n, \mathfrak{S}_v \in \mathcal{L}[\mathcal{A}_n^*]$ et $\text{card } \mathcal{S}_n = \dim \mathcal{L}[\mathcal{A}_n^*]$

Il suffit de prouver l'indépendance linéaire.

Si on a

$$\sum_{v \in \mathcal{S}_n} c_v \mathfrak{S}_v = 0$$

on applique à cette relation l'opérateur ∂_u et on garde les termes de degré 0.

On obtient ainsi $c_u = 0$. ■

Les harmoniques orbitales

Soit $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n$, les a_i distincts deux à deux.

$$\sigma.(a_1, \dots, a_n) = (a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)})$$

Définition 61 L'*orbite* du point α sous l'action de \mathcal{S}_n est :

$$[\alpha] = \{\sigma.\alpha, \sigma \in \mathcal{S}_n\}.$$

Son nombre d'éléments est : $\text{card}[\alpha] = n!$.

Exemple 62 ($n = 3$)

Si $\alpha = (1, 2, 3) \in \mathbb{Q}^3$, son orbite est :

$$\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$$

$$I[\alpha] = \{P \in \mathbb{Q}[X_n] / P(\beta) = 0 \quad \forall \beta \in [\alpha]\}$$

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[X_n]/I[\alpha]$$

Interpolation multivariée

But : trouver $\varphi \in \mathbb{Q}[X_n]$ tel que :

$$\varphi(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = \alpha, \\ 0 & \text{si } \beta \in [\alpha], \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

$$\varphi(X_n) = \prod_{i>j} \frac{x_i - a_j}{a_i - a_j}$$

Pour $\alpha = (1, 2, 3)$:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_3 - 1)(x_3 - 2)(x_2 - 1)$$

On remarque que :

$$\begin{aligned}\varphi(X_3) &= -1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_2x_3 - \frac{-1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}x_2x_3^2 \\ &\in \mathcal{L}[\mathcal{A}_3]\end{aligned}$$

Comme les polynômes symétriques sont constants sur $[\alpha]$, on raisonne modulo \mathcal{I}_n , donc on considère les monômes d'Artin, *i.e.* pour $n = 3$

$$1, x_2, x_3, x_2x_3, x_3^2, x_2x_3^2$$

On pose pour $\tau \in \mathcal{S}_n$: $\varphi_\tau(X_n) = \varphi(\tau.X_n)$.

$$\varphi_\tau(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = \tau^{-1}\alpha, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est *donc* une base de $\mathbb{Q}[\alpha]$; en particulier $\dim \mathbb{Q}[\alpha] = n!$.

$$\begin{aligned} \sigma.\varphi_\tau(X_n) &= \sigma.\varphi(\tau.X_n) \\ &= \varphi(\sigma\tau.X_n) \\ &= \varphi_{\sigma\tau}(X_n) \end{aligned}$$

$\mathbb{Q}[\alpha]$ est donc la représentation régulière de \mathcal{S}_n .

- famille génératrice :

$$P \in \mathbb{Q}[X_n]$$

$$Q = P(X_n) - \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} P(\tau^{-1}\alpha) \varphi_\tau(X_n)$$

$$\forall \beta \in [\alpha], Q(\beta) = P(\beta) - P(\beta) = 0$$

donc $Q \in I[\alpha]$.

- famille libre :

$$\text{Si } \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} c_\tau \varphi_\tau = 0,$$

on prend la valeur en $\sigma^{-1}\alpha$: $c_\sigma = 0$.

Posons $H_k(X_n) = h_k(X_n) - h_k(\alpha)$.

On a : $H_k \in I[\alpha]$.

Puisque

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[X_n]/I[\alpha] \subseteq \mathbb{Q}[X_n]/\mathcal{I}_n = Q_n$$

et $\dim \mathbb{Q}[\alpha] = \dim Q_n = n!$, on en tire

Théorème 63

Pour tout α , $Q_n \simeq \mathbb{Q}[\alpha]$; en particulier, Q_n est isomorphe à la représentation régulière de \mathcal{S}_n .

$$\begin{aligned}
h_1(X_3) - 6 &= x_1 + x_2 + x_3 - 6 \\
h_2(X_3) - 25 &= x_1(h_1(X_3) - 6) + h_2(x_2, x_3) \\
&\quad + 6x_1 - 25 \\
&\equiv x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 + 6x_1 - 25 \\
h_3(X_3) - 90 &= x_1(h_2(X_3) - 25) + h_3(x_2, x_3) \\
&\quad + 25x_1 - 90 \\
&\equiv h_3(x_2, x_3) + 25x_1 - 90 \\
&= x_2(h_2(x_2, x_3) + 6x_1 - 25) + x_3^3 \\
&\quad - 6x_1x_2 + 25x_2 + 25x_1 - 90 \\
&\equiv x_3^3 - 6x_1x_2 + 25x_1 + 25x_2 - 90
\end{aligned}$$

Exemple 64 (n=3)

$$\partial x_1^2 x_2 \Delta_3 = -6 = -6P_1$$

$$\partial x_1^2 \Delta_3 = -2x_2 + 2x_3 = 2P_2$$

$$\partial x_1 x_2 \Delta_3 = 2x_1 - 2x_3 = -2P_3$$

$$\partial x_1 \Delta_3 = -2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + x_2^2 - x_3^2 = P_4$$

$$\partial x_2 \Delta_3 = -x_1^2 + 2x_1 x_2 - 2x_2 x_3 + x_3^2 = P_5$$

$$\Delta_3 = -x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 - x_1 x_3^2 - x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 = P_6$$

- $P_1 = 1$

$\mathcal{L}[P_1]$ stable : représentation triviale

$$\mathcal{L}[P_1] = S^{\square\square\square}$$

- $P_6 = \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$

$\mathcal{L}[P_6]$ stable : représentation alternante

$$\mathcal{L}[P_6] = S^{\begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix}}$$

- $P_2 = x_3 - x_2$; $P_3 = x_3 - x_1$

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \Delta_{T_1} = x_3 - x_1$$

$$T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \Delta_{T_2} = x_2 - x_1$$

$$P_2 = \Delta_{T_1} - \Delta_{T_2} \quad ; \quad P_3 = \Delta_{T_1}$$

$$\mathcal{L}[P_2, P_3] = \mathcal{L}[\Delta_{T_1}, \Delta_{T_2}] = S^{\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}}$$

- $P_4 = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - x_3^2$

$$P_5 = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

$$R_4 = -x_1^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_2^2$$

$\mathcal{L}[P_4, P_5] = \mathcal{L}[P_5, R_4]$ est stable et :

$$\begin{aligned} \rho(Id) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \rho((12)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ \rho((13)) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \rho((23)) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \rho((123)) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & \rho((132)) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[P_4, P_5] = S^{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}}$$

Remarque 65 ($n = 7$)

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 6 & \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 1 & 4 & 7 \\ \hline \end{array}$$

$$\Delta_T = \Delta_3(x_1, x_2, x_3) \times \Delta_3(x_4, x_5, x_6) \times 1$$

$$\Delta_T = \frac{1}{155520000} \partial(x_7^6(x_4x_5x_6)^3) \Delta_7$$

$$\begin{array}{|cccccc|} \hline 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 & x_1^5 & x_1^6 \\ \hline 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 & x_2^5 & x_2^6 \\ \hline 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 & x_3^5 & x_3^6 \\ \hline 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 & x_4^5 & x_4^6 \\ \hline 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 & x_5^5 & x_5^6 \\ \hline 1 & x_6 & x_6^2 & x_6^3 & x_6^4 & x_6^5 & x_6^6 \\ \hline 1 & x_7 & x_7^2 & x_7^3 & x_7^4 & x_7^5 & x_7^6 \\ \hline \end{array}$$

Structure de représentation graduée

Définition 66 Soit T un tableau standard. Le *tableau de cocharge* associé à T est défini ainsi : on remplace l'entrée 1 de T par 0 ; puis, ayant remplacé l'entrée i par c , on remplace $i + 1$ par c si $i + 1$ est à droite de i et par $c + 1$ sinon.

Exemple 67

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 2 & 5 & 7 \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad C(T) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Le *groupe symétrique positif des lignes* de ce même tableau T est

$$P(T) = [6][2, 5, 7][1, 3, 4]$$

avec par exemple

$$[1, 3, 4] = Id + (34) + (13) + (14) + (134) + (431).$$

On associe à chaque paire (S, C) , où S est un tableau standard et C un tableau de cocharge de même forme un monôme de la façon suivante

$$S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & & \\ \hline 3 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} \quad C = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$m_{S,C}(X_7) = x_1^0 x_2^1 x_4^1 x_3^1 x_5^2 x_6^3 x_7^3$$

Théorème 68

$\{P(S)m_{S,C}(X_n) , S \text{ standard et } C \text{ cocharge de même forme}\}$

est une base de Q_n et pour C fixé de forme λ

$\{P(S)m_{S,C}(X_n) , S \text{ standard de forme } \lambda\}$

est isomorphe à S^λ .

Exemple 69 (n=3)

$$\bullet \lambda = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad S = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad C = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \longrightarrow x_2 x_3^2 \longrightarrow S^{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}}$$

$$\bullet \lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

$$S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad C = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \longrightarrow 6 \longrightarrow S^{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}$$

$$\bullet \lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

$$S = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \square \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad C = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \square \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$S = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \square \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad C = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \square \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\longrightarrow x_2, x_3 \longrightarrow S^{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}}$$

$$\longrightarrow x_2 x_3 + x_2 x_1, x_3 x_2 + x_3 x_1 \longrightarrow S^{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}}$$

Corollaire 70

$$\mathbb{Q}[X_n]/\mathcal{I}_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} S^\lambda \left(\sum_{T \in ST(\lambda)} q^{|C(T)|} \right).$$

Remarque 71

Si on prend $q = 1$:

$$\mathbb{Q}[X_n]/\mathcal{I}_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} S^\lambda f_\lambda$$

en particulier

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} f_\lambda^2.$$

L'espace harmonique

$$\mathbf{H}_n = \mathcal{I}_n^\perp \simeq \mathcal{Q}_n$$

$$P \in \mathbf{H}_n \iff \begin{cases} (\partial x_1 + \cdots + \partial x_n)P = 0 \\ (\partial x_1^2 + \cdots + \partial x_n^2)P = 0 \\ \dots \\ (\partial x_1^n + \cdots + \partial x_n^n)P = 0 \end{cases}$$

Définition 72 *Déterminant de Vandermonde*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

Définition 73 $P \in \mathbb{Q}[X_n]$ est *anti-symétrique* si

$$\sigma.P = \epsilon(\sigma)P$$

Lemme 74

P est *anti-symétrique* si et seulement si

$\exists Q \in \mathbb{Q}[X_n]$ *symétrique* tel que $P = Q \times \Delta_n$.

Preuve.

- Si $P = Q \times \Delta_n$, alors $\sigma.P = \epsilon(\sigma)P$.
- Si P *anti-symétrique*, alors P s'annule dès que $x_i = x_j$.

Donc $x_i - x_j$ divise P .

Donc Δ_n divise P : $P = Q \times \Delta_n$. ▀

Proposition 75

$$\Delta_n \in \mathbf{H}_n$$

Preuve.

$P_k = p_k(\partial)\Delta_n$ est anti-symétrique.

Donc Δ_n divise P_k .

Mais $\deg P_k < \deg \Delta_n$; $P_k = 0$. ■

Théorème 76

$$\mathbf{H}_n = \mathcal{L}_\partial[\Delta_n]$$

et une base est donnée par

$$\{\partial X_n^\epsilon \Delta_n, X_n^\epsilon \in \mathcal{A}_n^*\}.$$

Preuve.

- $\mathcal{L}_\partial[\Delta_n] \subseteq \mathbf{H}_n$

- pour $n = 3$:

$$\Delta_3 = -x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 - x_1 x_3^2 - x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2$$

$$\partial x_1 \Delta_3 = -2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + x_2^2 - x_3^2$$

$$\partial x_2 \Delta_3 = -x_1^2 + 2x_1 x_2 - 2x_2 x_3 + x_3^2$$

$$\partial x_1^2 \Delta_3 = -2x_2 + 2x_3$$

$$\partial x_1 x_2 \Delta_3 = 2x_1 - 2x_3$$

$$\partial x_1^2 x_2 \Delta_3 = -6$$

En général, pour $X_n^\epsilon \in \mathcal{A}_n^*$, i.e. $\forall i, \epsilon_i \leq \delta_i$

$$LM(\partial X_n^\epsilon \Delta_n) = X_n^{\delta - \epsilon}$$

$(\delta = (n - 1, n - 2, \dots, 1, 0))$

■

Structure de \mathcal{S}_n -module :

$$(1, 3).(x_1^2x_2 + x_3^3) = x_3^2x_2 + x_1^3$$

$$P = \partial x_1 \Delta_3 = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - x_3^2$$

$$Q = \partial x_2 \Delta_3 = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

$$(Id).P = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - x_3^2 = P$$

$$(1, 2).P = -2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_1^2 - x_3^2 = -Q$$

$$(1, 3).P = -2x_3x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - x_1^2 = P + Q$$

$$(2, 3).P = -2x_1x_3 + 2x_1x_2 + x_3^2 - x_2^2 = -P$$

$$(1, 2, 3).P = -2x_2x_3 + 2x_2x_1 + x_3^2 - x_1^2 = Q$$

$$(1, 3, 2).P = -2x_3x_1 + 2x_3x_2 + x_1^2 - x_2^2 = -P - Q$$