

Autour de certains espaces de polynômes harmoniques

Exercice 1

Trouver un exemple d'idéal $\mathcal{I} \subset \mathbb{Q}[x]$ tel que :

$$\mathbb{Q}[x]/\mathcal{I} \not\cong \mathcal{I}^\perp.$$

Exercice 2

Calculer une base de Gröbner pour l'ordre lexicographique gradué de l'idéal

$$\mathcal{I}_1 = (y^2 + z^2, x^2y + yz, z^3 + xy).$$

Exercice 3

Calculer une base de Gröbner pour l'ordre lexicographique gradué de l'idéal

$$\mathcal{I}_2 = (xz, xy - z, yz - x).$$

Exercice 4

Donner la série de Hilbert de $\mathbb{Q}[x, y, z]/\mathcal{I}_2$.

Exercice 5

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{Q}[X_n]/\mathcal{I}$ soit de dimension finie (utiliser les bases de Gröbner).

Exercice 6

Pourquoi a-t-on

$$\begin{aligned} (p_1(X_n), p_2(X_n), \dots, p_n(X_n)) &= (p_1(X_n), p_2(X_n), \dots, p_n(X_n), p_{n+1}(X_n)) \\ &= (p_i(X_n), i \geq 0) ? \end{aligned}$$

$$(p_i(X_n) = x_1^i + \dots + x_n^i)$$

Exercice 7

Considérons $G = \mathcal{S}_4$. Combien a-t-on de représentations irréductibles. Quelle est la dimension de S^{\boxplus} ? Vérifiez (matriciellement) que pour cette représentation

$$\rho((1, 2)(3, 4)) = \rho((1, 2))\rho((3, 4))$$

Exercice 8

À quelle condition deux éléments de B_n sont-ils conjugués ? Par conséquent, quel est le nombre de représentations irréductibles de B_n ?

Exercice 9

On étend aisément la théorie des harmoniques orbitales ($\mathbb{Q}[\alpha]$) au cas du groupe B_n .

Si $n = 3$ et $\alpha = (1, 2, 3)$, trouver φ tel que :

$$\varphi(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = \alpha, \\ 0 & \text{si } \beta \in [\alpha], \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

Si vous êtes habiles, tous les monômes apparaissant dans φ sont des diviseurs $x_1 x_2^3 x_3^5$ (analogue des monômes d'Artin pour B_n).

Exercice 10

Nous avons vu l'action de p_k et e_k sur les déterminants de diagramme. Le

but de cet exercice est de découvrir celle de h_k . On considère $D = \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array}$ et h_3 . Calculer $h_3(\partial X_3)\Delta_D$, sachant que $h_3 = -e_3 + 2e_1e_2 - e_1^3$. Quelle peut être en général l'action de h_k ?

Exercice 11

L'idéal $\mathcal{D}I_n$ est engendré par les fonctions diagonalement symétrique sans terme constant. Montrer que

$$\dim \mathbb{Q}[X_n, Y_n]/\mathcal{D}I_n = (n + 1)^{n-1}$$

pour $n = 2$.

Exercice 12

Comment définir un espace de polynômes diagonalement super-harmoniques ?