

Couplages parfaits dans les graphes symétriques et applications

Sujet de mémoire de M2 proposé par
Jean-Christophe Aval, Philippe Duchon (LaBRI, Bordeaux)

Un *couplage parfait* d'un graphe G est un ensemble M d'arêtes de G tel que tout sommet de G est incident à exactement une arête de M .

Dans le cas où le graphe G est biparti (tous les sommets sont colorés en noir ou blanc, et toute arête joint un sommet noir et un sommet blanc) et présente un axe de symétrie, M. Ciucu [1] a prouvé un théorème de factorisation. Ce théorème permet de factoriser l'énumération des couplages parfaits de G comme un produit impliquant l'énumération des couplages parfaits de G_1 et G_2 , obtenus en coupant G selon son axe de symétrie.

Ce théorème de factorisation a de multiples applications. La plus classique concerne l'énumération de pavages par des losanges de régions hexagonales [2, 3].

Les objectifs de ce mémoire sont les suivants :

- présenter de façon claire et précise le théorème de factorisation, ainsi qu'une preuve ;
- exposer différentes applications de ce résultat ;
- étudier une possible généralisation, en relâchant les hypothèses du théorème de factorisation, en particulier essayer de l'étendre à des graphes non nécessairement bipartis.

Ce travail pourra déboucher sur une proposition de sujet de thèse, incluant l'étude de certaines classes de matrices à signes alternants.

Références

- [1] M. CIUCU, *Enumeration of perfect matchings in graphs with reflective symmetry*, J. Combin. Theory Ser. A **77** (1997), 67–97.
- [2] M. CIUCU, C. KRATTENTHALER, *The number of centered lozenge tilings of a symmetric hexagon*, J. Combin. Theory Ser. A **86** (1999), 103–126.
- [3] M. CIUCU, C. KRATTENTHALER, *Plane partitions II : 5 1/2 symmetry classes*, Advanced Studies in Pure Mathematics **28** (2000), 83-103.