

Combinatoire de déformations du centre de l'algèbre du groupe symétrique

Sujet de mémoire de M2 proposé par
Jean-Christophe Aval, Valentin Féray (LaBRI, Bordeaux)

L'ensemble des permutations sur n lettres forme un groupe pour la composition, appelé groupe symétrique, et noté S_n . Le produit de S_n peut être étendu à l'espace vectoriel des combinaisons linéaires d'éléments de S_n , formant l'algèbre du groupe symétrique. Cette algèbre est le sujet de nombreux articles de recherche, tant d'un point de vue algébrique que combinatoire (les problèmes de dénombrement de cartes peuvent être formulés dans cette algèbre). Le fait que les groupes symétriques $S_n, n \in \mathbb{N}$ soient inclus les uns dans les autres est primordial : ainsi, Farahat et Higman [FH59] ont montré en 1959 que les coefficients de structure du centre de cette algèbre étaient des polynômes en n . Kerov et Ivanov [IK01] ont ensuite proposé une construction donnant une interprétation combinatoire des coefficients de ces polynômes (écrits dans la base des binomiaux).

Il existe de nombreuses déformations intéressantes du centre de l'algèbre du groupe symétrique : par exemple l'algèbre de Hecke du couple (S_{2n}, H_n) (H_n est le groupe hyperoctaédral, qui peut être vu comme le groupe des permutations signées), où apparaissent les dénombrements de cartes sur des surfaces non nécessairement orientables (voir [GJ96]). Un travail récent de Aker et Can établit un analogue du résultat de Farahat et Higman [AC10].

Le but de ce mémoire est de fournir une présentation détaillée et illustrée de cet article de recherche, et en particulier de :

- présenter de façon claire et précise plusieurs propriétés classiques des groupes de permutations ;
- donner une preuve complète de la polynomialité des coefficients de structure ;
- expliciter ces coefficients de structure dans le “cas maximal” ;
- proposer des exemples pour ces propriétés ;
- si le temps le permet, étendre les points ci-dessus au cadre de l'algèbre de Hecke du couple (S_{2n}, H_n) .

Ce travail pourra déboucher sur une proposition de sujet de thèse, commençant par exemple par la généralisation du travail de Ivanov et Kerov à (S_{2n}, H_n) .

Références

- [AC10] K. Aker and M.B. Can. Hecke Ring of (S_{2n}, H_n) : Generators and the Farahat-Higman Ring. *Arxiv preprint arXiv :1009.5373*, 2010.
- [FH59] H. Farahat and G. Higman. The centres of symmetric group rings. *Proc. Roy. Soc. (A)*, 250 :212–221, 1959.
- [GJ96] IP Goulden and DM Jackson. Maps in locally orientable surfaces, the double coset algebra, and zonal polynomials. *Canadian Journal of Mathematics*, 48(3) :569–584, 1996.
- [IK01] VN Ivanov and SV Kerov. The algebra of conjugacy classes in symmetric groups and partial permutations. *Journal of Mathematical Sciences*, 107(5) :4212–4230, 2001.