

Permutations, clés et matrices à signes alternants

Jean-Christophe Aval

LaBRI – 09-02-07

Permutations

permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$

Permutations

permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$

→ mot $\sigma = 425613$

Permutations

permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$

→ mot $\sigma = 425613$

→ matrice $\sigma =$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Permutations

permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$

→ mot $\sigma = 425613$

→ matrice $\sigma =$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

→ produit de transpositions élémentaires $s_i = (i, i + 1)$

$\sigma =$

Ordre faible

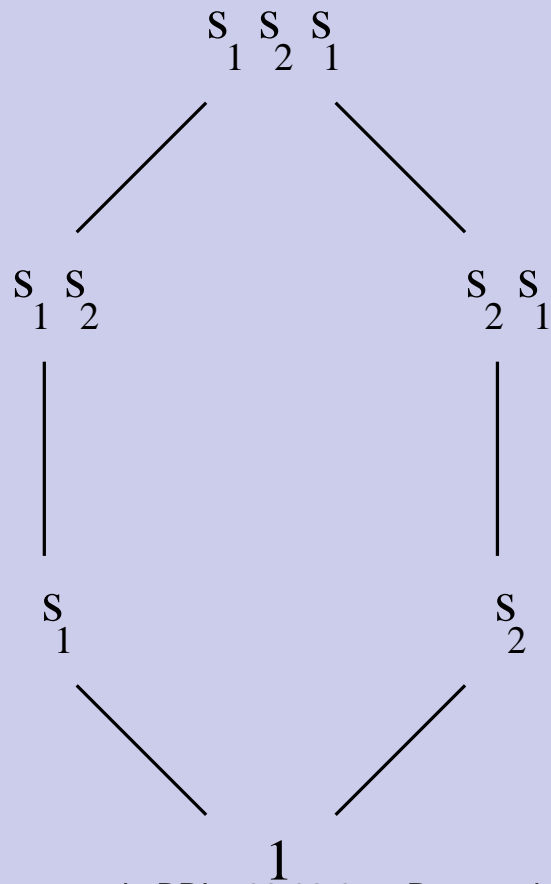
Ordre faible

$$\sigma \leq_1 \tau \iff \begin{cases} \ell(\sigma) = \ell(\tau) - 1 \\ \exists i, \sigma = \tau \cdot s_i \end{cases}$$

Ordre faible

$$\sigma \leq_1 \tau \iff \begin{cases} \ell(\sigma) = \ell(\tau) - 1 \\ \exists i, \sigma = \tau \cdot s_i \end{cases}$$

(n=3)



Ordre de Bruhat

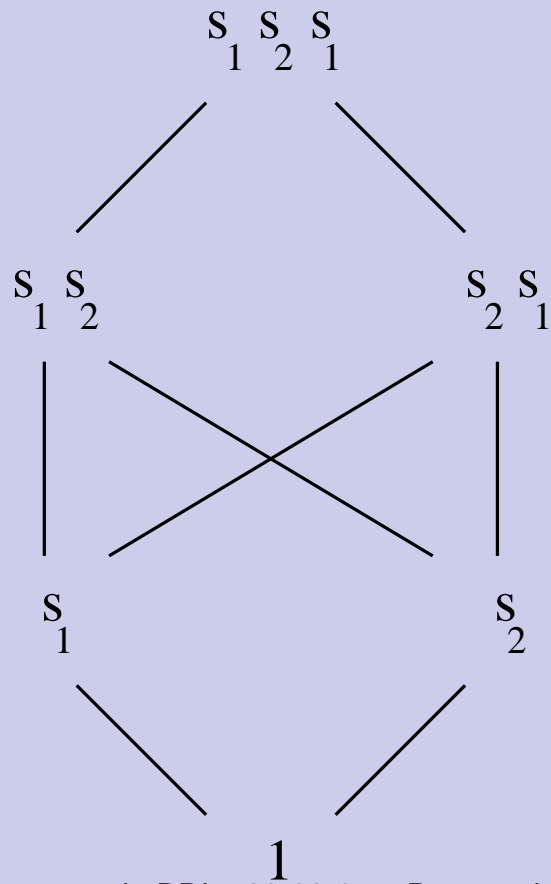
Ordre de Bruhat

$$\sigma \leq_1 \tau \iff \begin{cases} \ell(\sigma) = \ell(\tau) - 1 \\ \exists i < j, \sigma = \tau \cdot (i, j) \end{cases}$$

Ordre de Bruhat

$$\sigma \leq_1 \tau \iff \begin{cases} \ell(\sigma) = \ell(\tau) - 1 \\ \exists i < j, \sigma = \tau \cdot (i, j) \end{cases}$$

(n=3)



Clés

Clés

Une **clé** est un tableau de Young dont les colonnes sont ordonnées pour l'inclusion

Clés

Une **clé** est un tableau de Young dont les colonnes sont ordonnées pour l'inclusion

9				
7				
5	9			
4	5	9	9	
3	4	5	5	
1	1	4	4	5

Exemple :

Clé d'une permutation

Clé d'une permutation

$$\sigma = 425613 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Clé d'une permutation

$$\sigma = 425613 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$K(\sigma) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 6 & & & & & \\ \hline 5 & 6 & & & & \\ \hline 4 & 5 & 6 & & & \\ \hline 3 & 4 & 5 & 5 & & \\ \hline 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Clés et ordre de Bruhat

Clés et ordre de Bruhat

$$\sigma \leq \tau \iff K(\sigma) \leq K(\tau)$$

Clés et ordre de Bruhat

$$\sigma \leq \tau \iff K(\sigma) \leq K(\tau)$$

$$\sigma = 425613 \leq \tau = 465213$$

Clés et ordre de Bruhat

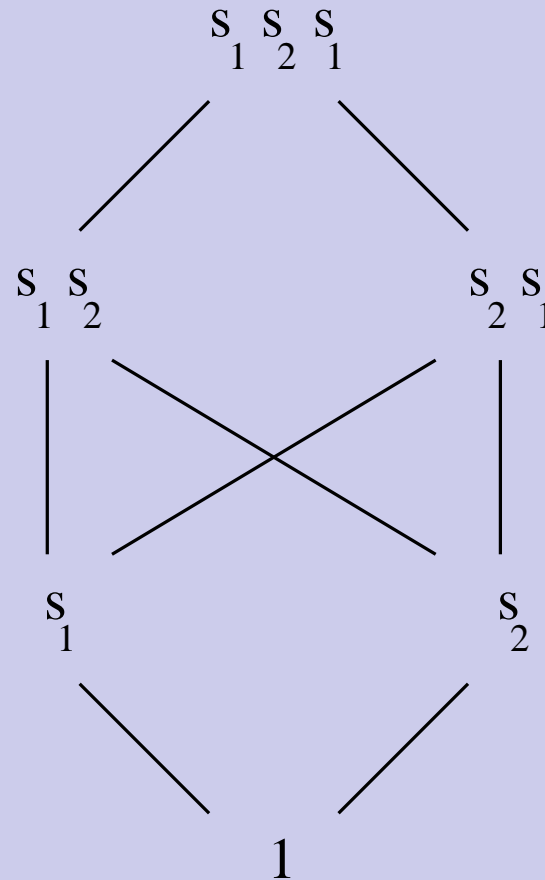
$$\sigma \leq \tau \iff K(\sigma) \leq K(\tau)$$

$$\sigma = 425613 \leq \tau = 465213$$

$$K(\sigma) = \begin{array}{cccccc} 6 & & & & & \\ 5 & 6 & & & & \\ 4 & 5 & 6 & & & \\ 3 & 4 & 5 & 5 & & \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{array} \leq \begin{array}{cccccc} 6 & & & & & \\ 5 & 6 & & & & \\ 4 & 5 & 6 & & & \\ 3 & 4 & 5 & 6 & & \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 6 & \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 4 \end{array} = K(\tau)$$

Plongement de \mathcal{S}_n dans le treillis des

Plongement de \mathcal{S}_n dans le treillis des



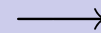
MSA et triangles monotones

MSA et triangles monotones

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & -1 & 1 & -1 & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & -1 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \end{pmatrix}$$

MSA et triangles monotones

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & -1 & 1 & -1 & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & -1 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \end{pmatrix}$$



9								
8	9							
7	8	9						
6	7	8	9					
5	5	6	8	8				
4	4	5	6	7	8			
3	3	3	3	5	7	8		
2	2	2	2	3	5	7	7	
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Clé d'une MSA

Clé d'une MSA

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & -1 & 1 & -1 & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & -1 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \end{pmatrix}$$

Clé d'une MSA

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & 0 & . & . & . & . \\ . & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ . & 0 & . & . & 0 & 1 & -1 & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & -1 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \end{pmatrix}$$

Clé d'une MSA

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & 0 & . & . & . & . \\ . & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ . & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & -1 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \end{pmatrix}$$

Clé d'une MSA

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 0 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & 0 & . & . & . & . \\ . & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ . & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & 1 \\ . & . & . & 1 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & . & 0 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \end{pmatrix}$$

Clé d'un tableau de Young

Clé d'un tableau de Young

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 3 & 6 & \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \longrightarrow w = 431\ 62\ 5$$

Clé d'un tableau de Young

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 3 & 6 & \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \longrightarrow w = 431\ 62\ 5$$

Classe plaxique de w :

1 4 63 52 , 1 4 632 5 , 1 43 652 , 4 61 32 5 , 4 61 3 52 , 1 43 62 5 ,
1 432 65 , 4 631 2 5 , 431 2 65 , 431 62 5 , 41 3 652 , 41 3 62 5 ,
41 63 52 , 41 632 5 , 41 32 65 , 43 61 2 5

Application

Application

Proposition Le nombre de MSA ayant un seul -1 est

$$A_n^{(1)} = \frac{n!^2}{3!^2(n-3)!} = \frac{n! n(n-1)(n-2)}{36}$$

Extraction

Extraction

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Extraction

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Proposition Le nombre de MSA ayant exactement deux -1 est

$$A_n^{(2)} = n!^2 \left(\frac{1}{36(n-6)!} + \frac{11}{30(n-5)!} + \frac{1}{12(n-4)!} \right)$$

Questions ouvertes

Questions ouvertes

Liens avec les Partitions Planes Descendantes ?

6 6 5 4
4 4 2
2

Questions ouvertes

Liens avec les Partitions Planes Descendantes ?

6 6 5 4
4 4 2
2

→ clé sur les PPD ?

→ nombres $A_n^{(1)}$, et $A_n^{(2)}$...

Questions ouvertes

Liens avec les Partitions Planes Descendantes ?

6 6 5 4
4 4 2
2

→ clé sur les PPD ?

→ nombres $A_n^{(1)}$, et $A_n^{(2)}$...

