

Polynômes quasi-invariants
et super-covariants
pour le groupe symétrique
généralisé

Jean-Christophe Aval
(A2X, Bordeaux)

Rappel 1

\mathcal{S}_n : groupe symétrique

groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$.

$$\#\mathcal{S}_n = n!$$

Action “classique” de \mathcal{S}_n sur $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{C}[X_n]$:

$$\sigma . P(x_1, \dots, x_n) = P(\sigma.X_n) = P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

$P \in \mathbb{C}[X_n]$ est *symétrique* ssi

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma . P = P.$$

Sym_n : espace des polynômes symétriques.

Définition 1 Espace harmonique :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_n &= \{P \in \mathbb{C}[X_n] / \forall Q \in \text{Sym}_n^+, Q(\partial)P = 0\} \\ &\simeq \mathbb{C}[X_n] / \langle \text{Sym}_n^+ \rangle.\end{aligned}$$

Théorème 1 (Artin)

$$\dim \mathbf{H}_n = n!.$$

Définition 2

$G_{n,m}$: *groupe symétrique généralisé*

$$= C_m \wr S_n$$

: *groupe des matrices de pseudo-permutations dont les entrées non nulles sont des racines m -ièmes de l'unité.*

Exemple 1

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in G_{5,4}$$

Remarque 1 $\# G_{n,m} = m^n n!$

$B_n = G_{n,2}$: *groupe hyperoctaédral*

: *groupe des permutations signées.*

$S_n = G_{n,1}$

Action de $G_{n,m}$ sur $\mathbb{C}[X_n]$:

$$g.P(X_n) = P(g.X_n)$$

Exemple 2 $m = 3$, $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$, $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & j \\ j & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (x_1^2 \ x_2) = j^2 x_1 x_3^2.$$

Définition 3 Polynômes invariants :

$$P \in Inv_{n,m} \Leftrightarrow \forall g \in G_{n,m}, g.P = P.$$

Proposition 1

$$P \in Inv_{n,m} \Leftrightarrow \exists Q \in Sym_n / P(X_n) = Q(X_n^m).$$

Définition 4 Polynômes covariants :

$$\begin{aligned} Cov_{n,m} &= \{P \in \mathbb{C}[X_n] / \forall Q \in Inv_{n,m}^+, Q(\partial) P = 0\} \\ &\simeq \mathbb{C}[X_n] / \langle Inv_{n,m}^+ \rangle. \end{aligned}$$

Remarque 2 $Cov_{n,1} = \mathbf{H}_n$.

Théorème 2 (Chevalley)

$$\dim Cov_{n,m} = \# G_{n,m} = m^n n! .$$

Définition 5 Action quasi-symétrisante de \mathcal{S}_n
(F. Hivert) :

$$A \subset X_n, \# A = l, K = (k_1, \dots, k_l), k_i > 0,$$

$$\sigma \bullet A^K = \{\sigma.A\}_{<}^K.$$

Exemple 3 $\sigma = 4231$

$$\begin{aligned} \sigma \bullet (x_1 x_3^2) &= \sigma \bullet (x_1, x_3)^{(1,2)} \\ &= \{\sigma.(x_1, x_3)\}_{<}^{(1,2)} \\ &= \{x_4, x_3\}_{<}^{(1,2)} \\ &= \{x_3, x_4\}^{(1,2)} \\ &= x_3 x_4^2. \end{aligned}$$

Fonctions quasi-symétriques

Définition 6 $P \in \mathbb{C}[X_n]$ est *quasi-symétrique* si $\forall k \leq n, \forall (a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$,

$$[x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_k}^{a_k}]P = [x_{j_1}^{a_1} \cdots x_{j_k}^{a_k}]P$$

dès que $i_1 < \cdots < i_k$ et $j_1 < \cdots < j_k$.

Notons $QSym_n$ leur ensemble.

Remarque 3 Il est clair que $Sym_n \subset QSym_n$,
mais (n=3)

$$x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 \in QSym_n \setminus Sym_n.$$

$$[2,1,0]+[2,0,1]+[0,2,1]$$

Proposition 2

$$P \in QSym_n \Leftrightarrow \forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma \bullet P = P.$$

Définition 7 Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ une composition de $|\alpha| = k \geq 0$, noté $:\alpha| = k$, on définit :

$$M_\alpha(X_n) = \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_l}^{\alpha_l}$$

et

$$F_\alpha(X_n) = \sum_{\beta \succeq \alpha} M_\beta(X_n).$$

Exemple 4 $n = 3, \alpha = (1, 2)$:

$$M_\alpha = x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2$$

$$F_\alpha = M_{(1,2)} + M_{(1,1,1)}$$

$$= x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 + x_1 x_2 x_3$$

Définition 8 Espace Super-Harmonique

$$\mathbf{SH}_n = \{P \in \mathbb{C}[X_n] / \forall Q \in QSym_n^+, Q(\partial)P = 0\}$$
$$\simeq \mathbb{C}[X_n] / \langle QSym_n^+ \rangle.$$

Remarque 4

$$Sym_n \subset QSym_n \implies \mathbf{SH}_n \subset \mathbf{H}_n.$$

Théorème 3 (Aval, Bergeron, Bergeron)

$$\dim \mathbf{SH}_n = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Groupe	S_n	$G_{n,m}$
Invariants	Sym_n	$Inv_{n,m}$
Covariants	$\dim \mathbf{H}_n = n!$	$\dim Cov_{n,m} = m^n n!$
Quasi-invariants	$QSym_n$	
Super-covariants	$\dim \mathbf{SH}_n = C_n$	

Action quasi-symétrisante de $G_{n,m}$ sur $\mathbb{C}[X_n]$:

$$g \bullet A^K = \{g.A\}_{<}^K$$

Exemple 5 $m = 3$, $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$, $n = 3$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & j \\ j & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet (x_1^2 x_2) \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & j \\ j & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \{x_1, x_2\} \right]_{<}^{(2,1)} \\ &= \{j x_3, x_1\}_{<}^{(2,1)} \\ &= \{x_1, j x_3\}_{<}^{(2,1)} \\ &= j x_1^2 x_3. \end{aligned}$$

Définition 9 Quasi-invariants

$$P \in QInv_{n,m} \Leftrightarrow \forall g \in G_{n,m}, g \bullet P = P.$$

Proposition 3

$$P \in QInv_{n,m} \Leftrightarrow \exists Q \in QSym_n / P(X_n) = Q(X_n^m).$$

Exemple 6

$$\begin{aligned} M_{2,1}(X_3) &= x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 \\ &\in QSym_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{2,1}(X_3^2) &= x_1^4 x_2^2 + x_1^4 x_3^2 + x_2^4 x_3^2 \\ &\in QInv_{3,2} \end{aligned}$$

Définition 10 Super-covariants

$$SCov_{n,m} = \{P \in \mathbb{C}[X_n] / \forall Q \in QInv_{n,m}^+, Q(\partial)P = 0\}$$
$$\simeq Q[X_n] / \langle QInv_{n,m}^+ \rangle.$$

Théorème 4

$$\dim SCov_{n,m} = m^n C_n.$$

Corollaire 1

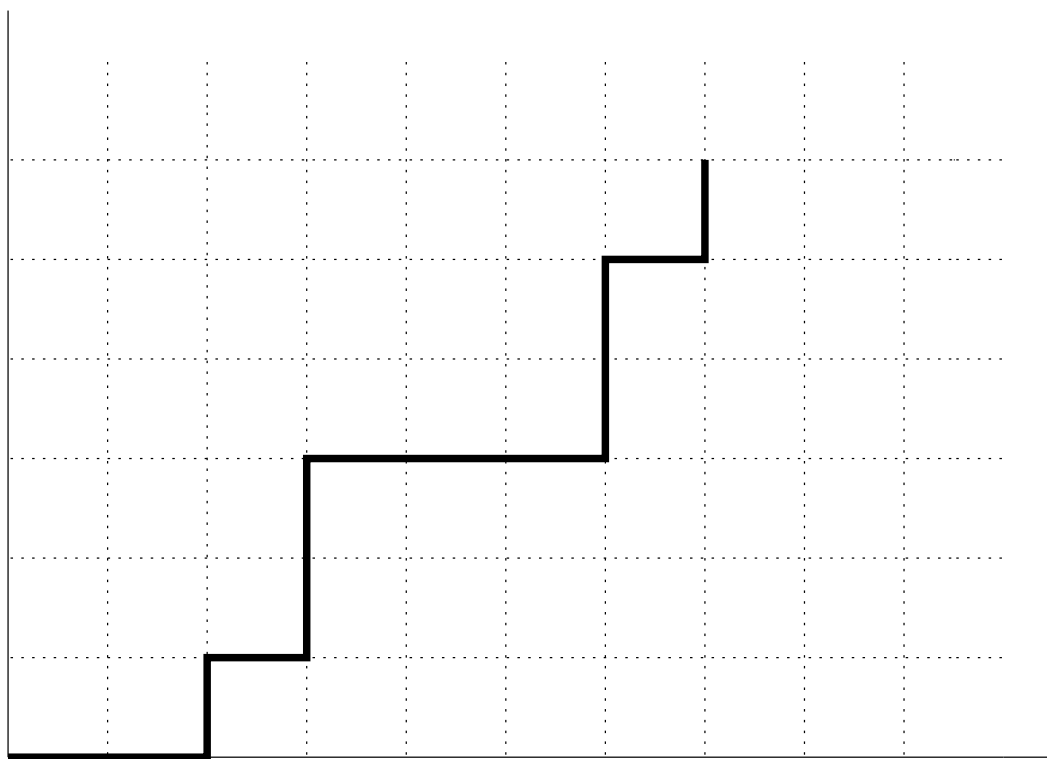
$$\dim SCov_{n,2} = 2^n C_n.$$

Correspondance entre éléments de \mathbb{N}^n et chemins

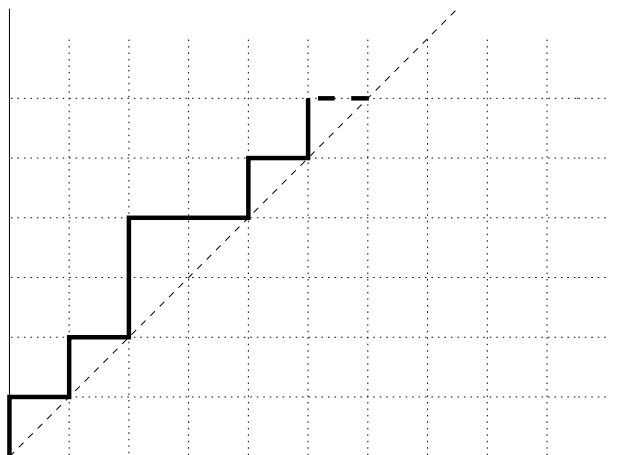
Exemple 7 Pour $n = 6$, on associe à

$$\epsilon = (2, 1, 0, 3, 0, 1)$$

le chemin P_ϵ suivant :

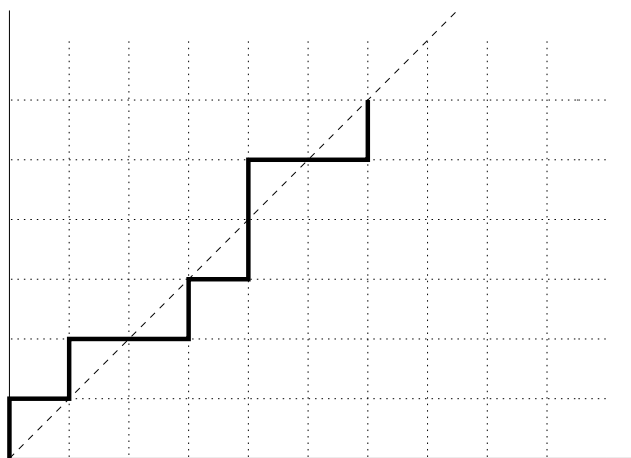


Chemin de Dyck :



$$\epsilon = (0, 1, 1, 0, 2, 1)$$

Chemin transdiagonal :



$$\epsilon = (0, 1, 2, 1, 0, 2)$$

Théorème 5 *L'ensemble de monômes*

$$\{(X_n)^{2\eta+\alpha} / \eta \text{ de Dyck}, 0 \leq \alpha_i < m\}$$

est une base de $\mathbb{C}[X_n]/\langle QInv_{n,m}^+ \rangle$.

Exemple 8 $m = n = 2$

$$\begin{aligned}M_1(X_2^2) &= x_1^2 + x_2^2 \\M_{11}(X_2^2) &= x_1^2 x_2^2 \\M_2(X_2^2) &= x_1^4 + x_2^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&M_2(X_2^2) + M_{11}(X_2^2) - x_1^2 M_1(X_2^2) \\&= x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 x_2^2 - x_1^2(x_1^2 + x_2^2) \\&= x_2^4\end{aligned}$$

Les monômes non divisibles par x_1^2 ou x_2^4 sont

$$1, x_1, x_2, x_1 x_2, x_2^2, x_1 x_2^2, x_2^3, x_1 x_2^3.$$

Exemple 9 ($n = 3$)

$$F_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

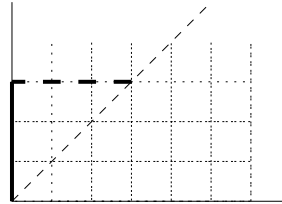
$$\begin{aligned} F_2 &= x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 \\ &= x_1(x_1 + x_2 + x_3) + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 \\ &\equiv x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{12} &= x_1x_2^2 + x_1x_2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 \\ &= x_1(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2) + x_2x_3^2 \\ &\equiv x_2x_3^2 \end{aligned}$$

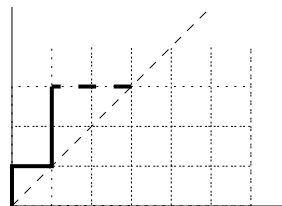
$$\begin{aligned} F_3 &= x_1F_2(x_1, x_2, x_3) + F_3(x_2, x_3) \\ &\equiv x_2^3 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^3 \\ &\equiv x_2(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2) + x_3^3 \\ &\equiv x_3^3 \end{aligned}$$

Les monômes non divisibles par $\{x_1, x_2^2, x_2x_3, x_3^3\}$
sont :

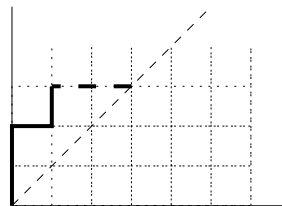
1



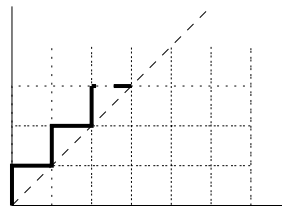
x_2



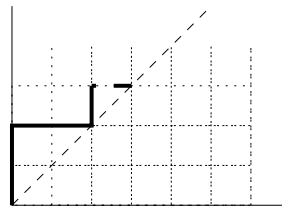
x_3



$x_2 x_3$



x_3^2



Série de Hilbert

$$SCov_{n,m}^{(k)} = SCov_{n,m} \cap \mathbb{C}_k[X_n].$$

Notons $C_n^{(k)}$ le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$ et comportant exactement k arches (facteurs),

$$C_n^{(k)} = \frac{k(2n - k - 1)!}{n!(n - k)!}.$$

$$F_{n,m}(t) = \sum \dim SCov_{n,m}^{(k)} t^k.$$

Théorème 6

$$F_{n,m}(t) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^{(n-k)} t^{mk} \right) \left(\frac{1 - t^m}{1 - t} \right)^n.$$

n	$F_{n,2}(t)$
1	$1 + t$
2	$1 + 2t + 2t^2 + 2t^3 + t^4$
3	$1 + 3t + 5t^2 + 7t^3 + 8t^4 + 8t^5 + 6t^6 + 2t^7$

$$\sum_n F_{n,m}(t) x^n =$$

$$\frac{(1-t) - \sqrt{(1-t)(1-t-4t^m x(1-t^m))} - 2x(1-t^m)}{(1-t)(2t^m - 1) - x(1-t^m)}$$

Théorème 7 (Steinberg)

$$\mathbf{H}_n = \mathcal{L}_\partial[\Delta_n]$$

où

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

et plus généralement :

$$\text{Cov}_{n,m} = \mathcal{L}_\partial[\Delta_{n,m}]$$

où

$$\Delta_{n,m} = \begin{vmatrix} x_1^{m-1} & x_1^{2m-1} & \cdots & x_1^{nm-1} \\ x_2^{m-1} & x_2^{2m-1} & \cdots & x_2^{nm-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{m-1} & x_n^{2m-1} & \cdots & x_n^{nm-1} \end{vmatrix}$$