



Algèbres de Hopf en combinatoire

Jean-Christophe Aval

28 mai 2004

Définition : algèbre de Hopf graduée

- \mathcal{H} est un \mathbb{Q} -ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$

Définition : algèbre de Hopf graduée

- \mathcal{H} est un \mathbb{Q} -ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- \mathcal{H} est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère

Définition : algèbre de Hopf graduée

- \mathcal{H} est un \mathbb{Q} -ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- \mathcal{H} est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère

$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \xrightarrow{*} \mathcal{H}$ linéaire :

$$\begin{aligned} u * (v + w) &= *(u \otimes (v + w)) \\ &= *(u \otimes v + u \otimes w) \\ &= u * v + u * w \end{aligned}$$

$$\mathbf{1} * u = u * \mathbf{1} = u$$

Définition : algèbre de Hopf graduée

- \mathcal{H} est un \mathbb{Q} -ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- \mathcal{H} est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère
- \mathcal{H} est une bigèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \Delta)$ coassociative, counifère

Définition : algèbre de Hopf graduée

- \mathcal{H} est un \mathbb{Q} -ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- \mathcal{H} est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère
- \mathcal{H} est une bigèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \Delta)$ coassociative, counifère

$\mathcal{H} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ morphisme d'algèbre :

$$\Delta(k \cdot u) = k \Delta(u)$$

$$\Delta(u + v) = \Delta(u) + \Delta(v)$$

$$\Delta(u * v) = \Delta(u) (* \otimes *) \Delta(v)$$

$$\Delta(\mathbf{1}) = \Delta(\mathbf{1}) \otimes \Delta(\mathbf{1})$$

Définition : algèbre de Hopf graduée

- \mathcal{H} est un \mathbb{Q} -ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- \mathcal{H} est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifiée
- \mathcal{H} est une bigèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \Delta)$ coassociative, counifère

Il existe $\mathcal{H} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Q}$ tel que $* \circ (\varepsilon \otimes Id) \circ \Delta = Id$, ie

si $\Delta(w) = \sum v_1 \otimes v_2$ alors $\sum \varepsilon(v_1) * v_2 = w$

Définition : algèbre de Hopf graduée

- \mathcal{H} est un \mathbb{Q} -ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- \mathcal{H} est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère
- \mathcal{H} est une bigèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \Delta)$ coassociative, counifère
- \mathcal{H} est graduée : $\mathcal{H} = \sqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n$

Définition : algèbre de Hopf graduée

- \mathcal{H} est un \mathbb{Q} -ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- \mathcal{H} est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère
- \mathcal{H} est une bigèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \Delta)$ coassociative, counifère
- \mathcal{H} est graduée : $\mathcal{H} = \sqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n$
 - $\mathcal{H}_k \otimes \mathcal{H}_l \xrightarrow{*} \mathcal{H}_{k+l}$
 - $\mathcal{H}_n \xrightarrow{\Delta} \sum_{k+l=n} \mathcal{H}_k \otimes \mathcal{H}_l$
 - $\mathcal{H}_0 = \mathbb{Q}$

Exemples

$$\begin{array}{ccccccc} Q & \hookrightarrow & Y & \hookrightarrow & S & \hookrightarrow & P \\ 2^{n-1} & \leq & C_n & \leq & n! & \leq & (n+1)^{n-1} \end{array}$$

Exemples

$$\begin{array}{ccccccc} Q & \hookrightarrow & Y & \hookrightarrow & S & \hookrightarrow & P \\ 2^{n-1} & \leq & C_n & \leq & n! & \leq & (n+1)^{n-1} \end{array}$$

Algèbre du groupe symétrique

[Malvenuto-Reutenauer]

S_n : groupe symétrique ; $S = \mathbb{Q}[\sqcup S_n]$

Algèbre du groupe symétrique

[Malvenuto-Reutenauer]

S_n : groupe symétrique ; $S = \mathbb{Q}[\sqcup S_n]$

Permutation associée à un mot sans répétition :

$$\text{Std}(4731) = 3421$$

Algèbre du groupe symétrique

[Malvenuto-Reutenauer]

S_n : groupe symétrique ; $S = \mathbb{Q}[\sqcup S_n]$

Permutation associée à un mot sans répétition :

$\text{Std}(4731) = 3421$

- $\sigma \in S_k, \alpha \in S_l, k + l = n ; \sigma * \alpha = \sum_{\substack{u,v=\{1,\dots,n\} \\ \text{Std}(u)=\sigma, \text{Std}(v)=\alpha}} uv$



Algèbre du groupe symétrique

[Malvenuto-Reutenauer]

S_n : groupe symétrique ; $S = \mathbb{Q}[\sqcup S_n]$

Permutation associée à un mot sans répétition :

$\text{Std}(4731) = 3421$

- $\sigma \in S_k, \alpha \in S_l, k + l = n ; \sigma * \alpha = \sum_{\substack{u,v=\{1,\dots,n\} \\ \text{Std}(u)=\sigma, \text{Std}(v)=\alpha}} uv$

Exemple : $12 * 21 = 1243 + 1342 + 1432 + 2341 + 2431 + 3421$

Algèbre du groupe symétrique

[Malvenuto-Reutenauer]

S_n : groupe symétrique ; $S = \mathbb{Q}[\sqcup S_n]$

Permutation associée à un mot sans répétition :

$$\text{Std}(4731) = 3421$$

- $\sigma \in S_k, \alpha \in S_l, k + l = n ; \sigma * \alpha = \sum_{\substack{u,v=\{1,\dots,n\} \\ \text{Std}(u)=\sigma, \text{Std}(v)=\alpha}} uv$

Exemple : $12 * 21 = 1243 + 1342 + 1432 + 2341 + 2431 + 3421$

- $\sigma \in S_n, \Delta(\sigma) = \sum_{i=0}^n \sigma|_{\{1,\dots,i\}} \otimes \text{Std}(\sigma|_{\{i+1,\dots,n\}})$
 $623154|_{\{125\}} = 215$



Algèbre du groupe symétrique

[Malvenuto-Reutenauer]

S_n : groupe symétrique ; $S = \mathbb{Q}[\sqcup S_n]$

Permutation associée à un mot sans répétition :

$$\text{Std}(4731) = 3421$$

- $\sigma \in S_k, \alpha \in S_l, k + l = n$; $\sigma * \alpha = \sum_{\substack{u,v=\{1,\dots,n\} \\ \text{Std}(u)=\sigma, \text{Std}(v)=\alpha}} uv$

$$\text{Exemple : } 12 * 21 = 1243 + 1342 + 1432 + 2341 + 2431 + 3421$$

- $\sigma \in S_n, \Delta(\sigma) = \sum_{i=0}^n \sigma|_{\{1,\dots,i\}} \otimes \text{Std}(\sigma|_{\{i+1,\dots,n\}})$
 $623154|_{\{125\}} = 215$

$$\text{Exemple : } \Delta(3124)$$

$$= \mathbf{1} \otimes 3124 + \mathbf{1} \otimes \text{Std}(324) + 12 \otimes \text{Std}(34) + 312 \otimes \text{Std}(4) + 3124 \otimes \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{1} \otimes 3124 + \mathbf{1} \otimes 213 + 12 \otimes 12 + 312 \otimes \mathbf{1} + 3124 \otimes \mathbf{1}$$

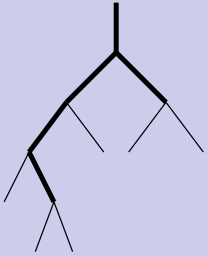


Exemples

$$\begin{array}{ccccccc} Q & \hookrightarrow & Y & \hookrightarrow & S & \hookrightarrow & P \\ 2^{n-1} & \leq & C_n & \leq & n! & \leq & (n+1)^{n-1} \end{array}$$

Algèbre des arbres binaires plans

[Loday-Ronco]

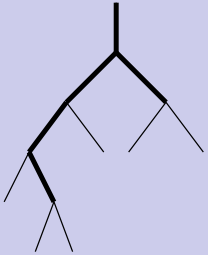


Y_n : ensemble des arbres binaires plans

$$Y = \mathbb{Q}[\sqcup Y_n]$$

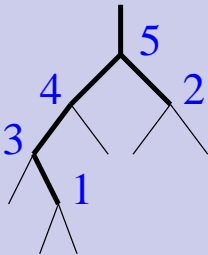
Algèbre des arbres binaires plans

[Loday-Ronco]



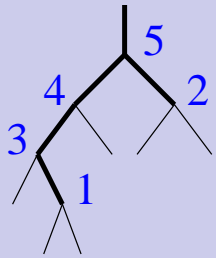
Y_n : ensemble des arbres binaires plans

$$Y = \mathbb{Q}[\sqcup Y_n]$$



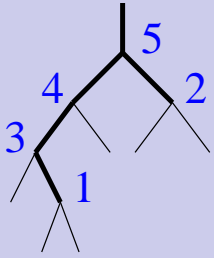
Y_n^+ : ensemble des arbres binaires plans
décroissants

Algèbre des arbres binaires plans



\longleftrightarrow 31452 bijection entre Y_n^+ et S_n

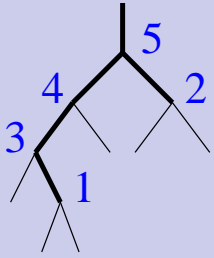
Algèbre des arbres binaires plans



\longleftrightarrow 31452 bijection entre Y_n^+ et S_n

Surjection $S_n \xrightarrow{\Psi} Y_n$ en oubliant les étiquettes

Algèbre des arbres binaires plans



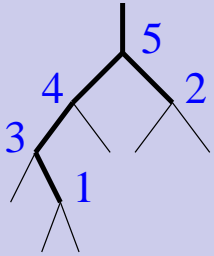
\longleftrightarrow 31452 bijection entre Y_n^+ et S_n

Surjection $S_n \xrightarrow{\Psi} Y_n$ en oubliant les étiquettes

Pour $T \in Y_n$, on définit

$$\bar{\Psi}(T) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \Psi(\sigma) = T}} \sigma \in S$$

Algèbre des arbres binaires plans



\longleftrightarrow 31452 bijection entre Y_n^+ et S_n

Surjection $S_n \xrightarrow{\Psi} Y_n$ en oubliant les étiquettes

Pour $T \in Y_n$, on définit

$$\bar{\Psi}(T) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \Psi(\sigma) = T}} \sigma \in S$$

- $T * T' = \bar{\Psi}^{-1}(\bar{\Psi}(T) * \bar{\Psi}(T'))$

Algèbre des arbres binaires plans

$$T * T' = \bar{\Psi}^{-1}(\bar{\Psi}(T) * \bar{\Psi}(T'))$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$T * T' = \bar{\Psi}^{-1}(\bar{\Psi}(T) * \bar{\Psi}(T'))$$

$$\wedge * \bullet =$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$T * T' = \bar{\Psi}^{-1}(\bar{\Psi}(T) * \bar{\Psi}(T'))$$

$$\wedge * \bullet = (231 + 132) * (1)$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$T * T' = \bar{\Psi}^{-1}(\bar{\Psi}(T) * \bar{\Psi}(T'))$$

$$\wedge * \bullet = (231 + 132) * (1)$$

$$= (2314 + 2413 + 3412 + 3421) + (1324 + 1423 + 1432 + 2431)$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$T * T' = \overline{\Psi}^{-1}(\overline{\Psi}(T) * \overline{\Psi}(T'))$$

$$\wedge * \bullet = (231 + 132) * (1)$$

$$= (2314 + 2413 + 3412 + 3421) + (1324 + 1423 + 1432 + 2431)$$

$$= \begin{array}{cccccccc} \begin{array}{c} 4 \\ / \quad \backslash \\ 3 \quad 1 \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 1 \end{array} & + & \begin{array}{c} 4 \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \end{array} & + & \begin{array}{c} 4 \\ / \quad \backslash \\ 3 \quad 2 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \end{array} & + & \begin{array}{c} 4 \\ / \quad \backslash \\ 3 \quad 2 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \end{array} & + & \begin{array}{c} 4 \\ / \quad \backslash \\ 3 \quad 2 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} & + & \begin{array}{c} 4 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 3 \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 2 \end{array} & + & \begin{array}{c} 4 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 3 \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 2 \end{array} & + & \begin{array}{c} 4 \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \end{array} \end{array}$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$T * T' = \overline{\Psi}^{-1}(\overline{\Psi}(T) * \overline{\Psi}(T'))$$

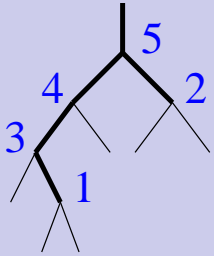
$$\wedge * \bullet = (231 + 132) * (1)$$

$$= (2314 + 2413 + 3412 + 3421) + (1324 + 1423 + 1432 + 2431)$$

$$= \begin{array}{cccccccc} \begin{array}{c} 4 \\ / \backslash \\ 3 \quad 1 \end{array} & + & \begin{array}{c} 4 \\ / \backslash \\ 2 \quad 1 \end{array} & + & \begin{array}{c} 4 \\ / \backslash \\ 3 \quad 1 \end{array} & + & \begin{array}{c} 4 \\ / \backslash \\ 3 \quad 2 \end{array} & + & \begin{array}{c} 4 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} & + & \begin{array}{c} 4 \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} & + & \begin{array}{c} 4 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} & + & \begin{array}{c} 4 \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} & + & \begin{array}{c} 4 \\ / \backslash \\ 2 \quad 1 \end{array} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} / \backslash \\ \quad \end{array} + \begin{array}{c} / \backslash \\ \quad \end{array} + \begin{array}{c} / \backslash \\ \quad \end{array}$$

Algèbre des arbres binaires plans



\longleftrightarrow 31452 bijection entre Y_n^+ et S_n

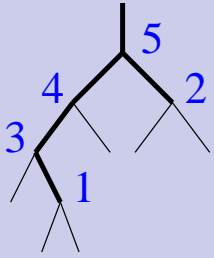
Surjection $S_n \xrightarrow{\Psi} Y_n$ en oubliant les étiquettes

Pour $T \in Y_n$, on définit

$$\bar{\Psi}(T) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \Psi(\sigma) = T}} \sigma \in S$$

- $T * T' = \bar{\Psi}^{-1}(\bar{\Psi}(T) * \bar{\Psi}(T'))$

Algèbre des arbres binaires plans



\longleftrightarrow 31452 bijection entre Y_n^+ et S_n

Surjection $S_n \xrightarrow{\Psi} Y_n$ en oubliant les étiquettes

Pour $T \in Y_n$, on définit

$$\bar{\Psi}(T) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \Psi(\sigma) = T}} \sigma \in S$$

- $T * T' = \bar{\Psi}^{-1}(\bar{\Psi}(T) * \bar{\Psi}(T'))$
- $\Delta(T) = (\bar{\Psi} \otimes \bar{\Psi})^{-1} \Delta(\bar{\Psi}(T))$

Algèbre des arbres binaires plans

$$\Delta(T) = (\bar{\Psi} \otimes \bar{\Psi})^{-1} \Delta(\bar{\Psi}(T))$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$\Delta(T) = (\overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi})^{-1} \Delta(\overline{\Psi}(T))$$



Algèbre des arbres binaires plans

$$\Delta(T) = (\bar{\Psi} \otimes \bar{\Psi})^{-1} \Delta(\bar{\Psi}(T))$$

$$\Delta \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) = \Delta(231 + 132)$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$\Delta(T) = (\bar{\Psi} \otimes \bar{\Psi})^{-1} \Delta(\bar{\Psi}(T))$$

$$\Delta \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \Delta(231 + 132) = \Delta(231) + \Delta(132)$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$\Delta(T) = (\overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi})^{-1} \Delta(\overline{\Psi}(T))$$

$$\Delta \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \Delta(231 + 132) = \Delta(231) + \Delta(132)$$

$$= \mathbf{1} \otimes 231 + \mathbf{1} \otimes 12 + 21 \otimes \mathbf{1} + 231 \otimes \mathbf{1}$$

$$+ \mathbf{1} \otimes 132 + \mathbf{1} \otimes 21 + 12 \otimes \mathbf{1} + 132 \otimes \mathbf{1}$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$\Delta(T) = (\overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi})^{-1} \Delta(\overline{\Psi}(T))$$

$$\Delta \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \Delta(231 + 132) = \Delta(231) + \Delta(132)$$

$$= \mathbf{1} \otimes 231 + \mathbf{1} \otimes 12 + 21 \otimes \mathbf{1} + 231 \otimes \mathbf{1}$$

$$+ \mathbf{1} \otimes 132 + \mathbf{1} \otimes 21 + 12 \otimes \mathbf{1} + 132 \otimes \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{1} \otimes \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 1 \end{array} + \mathbf{1} \otimes \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \otimes \mathbf{1} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 1 \end{array} \otimes \mathbf{1}$$

$$+ \mathbf{1} \otimes \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 2 \end{array} + \mathbf{1} \otimes \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \otimes \mathbf{1} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 2 \end{array} \otimes \mathbf{1}$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$\Delta(T) = (\overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi})^{-1} \Delta(\overline{\Psi}(T))$$

$$\Delta \wedge = \Delta(231 + 132) = \Delta(231) + \Delta(132)$$

$$= \mathbf{1} \otimes 231 + \mathbf{1} \otimes 12 + 21 \otimes \mathbf{1} + 231 \otimes \mathbf{1}$$

$$+ \mathbf{1} \otimes 132 + \mathbf{1} \otimes 21 + 12 \otimes \mathbf{1} + 132 \otimes \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{1} \otimes \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 1 \end{array} + \mathbf{1} \otimes \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \otimes \mathbf{1} + \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 1 \end{array} \otimes \mathbf{1}$$

$$+ \mathbf{1} \otimes \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} + \mathbf{1} \otimes \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \\ 1 \end{array} \otimes \mathbf{1} + \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \otimes \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{1} \otimes \wedge + \cdot \otimes \searrow + \cdot \otimes \swarrow + \swarrow \otimes \cdot + \searrow \otimes \cdot + \wedge \otimes \mathbf{1}$$

Exemples

$$\begin{array}{ccccccc} Q & \hookrightarrow & Y & \hookrightarrow & S & \hookrightarrow & P \\ 2^{n-1} & \leq & C_n & \leq & n! & \leq & (n+1)^{n-1} \end{array}$$

Algèbre des descentes

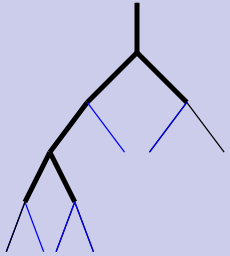
[Solomon]

$$Q_n = \{-1, +1\}^{n-1} \quad Q = \mathbb{Q}[\sqcup Q_n]$$

Algèbre des descentes

[Solomon]

$$Q_n = \{-1, +1\}^{n-1} \quad Q = \mathbb{Q}[\sqcup Q_n]$$



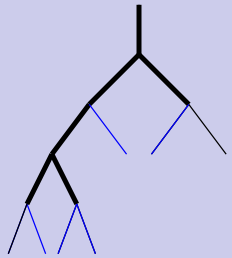
$$\longrightarrow (+1, -1, +1, +1, -1)$$

$$Y_n \xrightarrow{\Phi} Q_n \text{ surjection}$$

Algèbre des descentes

[Solomon]

$$Q_n = \{-1, +1\}^{n-1} \quad Q = \mathbb{Q}[\sqcup Q_n]$$



$$\longrightarrow (+1, -1, +1, +1, -1)$$

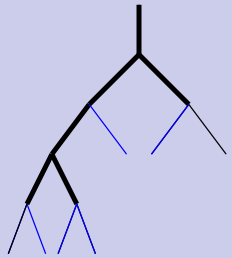
$$Y_n \xrightarrow{\Phi} Q_n \text{ surjection}$$

Pour $H \in Q_n$, on définit $\bar{\Phi}(H) = \sum_{\substack{T \in Y_n \\ \Phi(T) = H}} T \in Y$

Algèbre des descentes

[Solomon]

$$Q_n = \{-1, +1\}^{n-1} \quad Q = \mathbb{Q}[\sqcup Q_n]$$



$$\longrightarrow (+1, -1, +1, +1, -1)$$

$$Y_n \xrightarrow{\Phi} Q_n \text{ surjection}$$

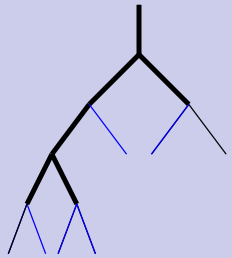
Pour $H \in Q_n$, on définit $\bar{\Phi}(H) = \sum_{\substack{T \in Y_n \\ \Phi(T)=H}} T \in Y$

$$\bar{\Psi} \circ \bar{\Phi}(H) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \Phi \circ \Psi(\sigma)=H}} \sigma = \sum_{Des(\sigma)=H} \sigma$$

Algèbre des descentes

[Solomon]

$$Q_n = \{-1, +1\}^{n-1} \quad Q = \mathbb{Q}[\sqcup Q_n]$$

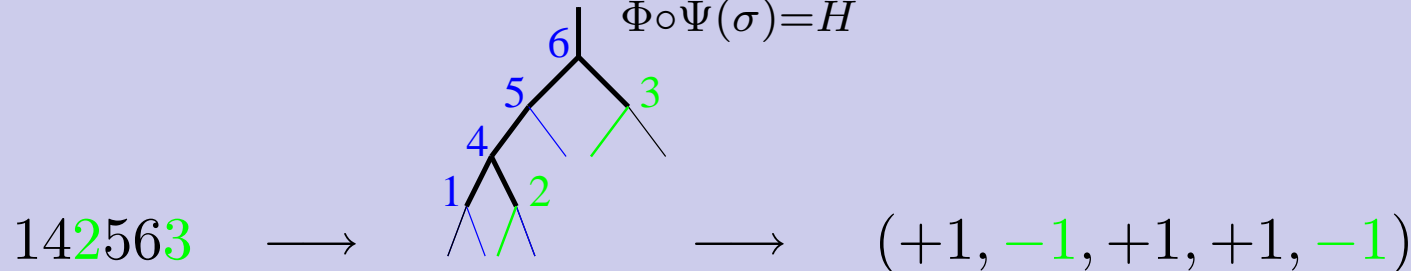


$$\longrightarrow (+1, -1, +1, +1, -1)$$

$$Y_n \xrightarrow{\Phi} Q_n \text{ surjection}$$

Pour $H \in Q_n$, on définit $\bar{\Phi}(H) = \sum_{\substack{T \in Y_n \\ \Phi(T)=H}} T \in Y$

$$\bar{\Psi} \circ \bar{\Phi}(H) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \Phi \circ \Psi(\sigma)=H}} \sigma = \sum_{Des(\sigma)=H} \sigma$$



Exemples

$$\begin{array}{ccccccc} Q & \hookrightarrow & Y & \hookrightarrow & S & \hookrightarrow & P \\ 2^{n-1} & \leq & C_n & \leq & n! & \leq & (n+1)^{n-1} \end{array}$$

Algèbre des fonctions de parking

[Novelli-Thibon]

$f \in \{1, \dots, n\}^n$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \#\{f_j \leq i\} \geq i$

(2, 1, 3, 2, 4)

Algèbre des fonctions de parking

[Novelli-Thibon]

$f \in \{1, \dots, n\}^n$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \#\{f_j \leq i\} \geq i$

(2, 1, 3, 2, 4)

Parkisation : $w \in \mathbb{N}^n, d(w) = \min\{i/\#\{w_j \leq i\} < i\}$

Algèbre des fonctions de parking

[Novelli-Thibon]

$f \in \{1, \dots, n\}^n$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \#\{f_j \leq i\} \geq i$

$(2, 1, 3, 2, 4)$

Parkisation : $w \in \mathbb{N}^n$, $d(w) = \min\{i / \#\{w_j \leq i\} < i\}$

$$w = (3, 5, 1, 1, 11, 8, 8, 2), \quad d(w) = 6$$

$$w' = (3, 5, 1, 1, 10, 7, 7, 2), \quad d(w') = 6$$

$$w'' = (3, 5, 1, 1, 9, 6, 6, 2), \quad d(w'') = 8$$

$$w''' = (3, 5, 1, 1, 8, 6, 6, 2), \quad d(w''') = 9$$

$$\text{Park}(w) = w''' = (3, 5, 1, 1, 8, 6, 6, 2)$$



Algèbre des fonctions de parking

- $f * g = \sum_{\substack{\text{Park}(u)=f, \text{Park}(v)=g \\ uv \in P}} uv$

Algèbre des fonctions de parking

- $f * g = \sum_{\substack{\text{Park}(u)=f, \text{Park}(v)=g \\ uv \in P}} uv$

$$\begin{aligned} 12 * 11 &= 1211 + 1222 + 1233 + 1311 + 1322 \\ &+ 1411 + 1422 + 2311 + 2411 + 3411 \end{aligned}$$

Algèbre des fonctions de parking

- $f * g = \sum_{\substack{\text{Park}(u)=f, \text{Park}(v)=g \\ uv \in P}} uv$

$$\begin{aligned} 12 * 11 &= 1211 + 1222 + 1233 + 1311 + 1322 \\ &+ 1411 + 1422 + 2311 + 2411 + 3411 \end{aligned}$$

- $\Delta(f) = \sum f|_{\{1, \dots, i\}} \otimes \text{Park}(f|_{\{i+1, \dots, n\}})$
où la somme est sur les **coupures** de $f : \#\{f_j \leq i\} = i$

Algèbre des fonctions de parking

- $f * g = \sum_{\substack{\text{Park}(u)=f, \text{Park}(v)=g \\ uv \in P}} uv$

$$\begin{aligned} 12 * 11 &= 1211 + 1222 + 1233 + 1311 + 1322 \\ &+ 1411 + 1422 + 2311 + 2411 + 3411 \end{aligned}$$

- $\Delta(f) = \sum f|_{\{1, \dots, i\}} \otimes \text{Park}(f|_{\{i+1, \dots, n\}})$
où la somme est sur les **coupures** de $f : \#\{f_j \leq i\} = i$

41252 \longrightarrow coupures en 1, 3, 4, 5

$$\Delta(41252) = \mathbf{1} \otimes 41252 + 1 \otimes 3141 + 122 \otimes 12 + 4122 \otimes 1 + 41252 \otimes \mathbf{1}$$

Algèbre des fonctions de parking

Surjection $\Pi : P_n \longrightarrow S_n$

$(2, 1, 1, 3) \longmapsto 2134$ (places de parking effectives)

$\rightsquigarrow S$ sous-algèbre de P

Exemples

- $Q \hookrightarrow Y \hookrightarrow S \hookrightarrow P$

Exemples

- $Q \hookrightarrow Y \hookrightarrow S \hookrightarrow P$
- Algèbre de Connes-Kreimer

Algèbre des forêts d'arbres

[Connes-Kreimer]

F_n ensemble des forêts d'arbres enracinés à n nœuds

$$F = \mathbb{Q}[\sqcup F_n]$$

Algèbre des forêts d'arbres

[Connes-Kreimer]

F_n ensemble des forêts d'arbres enracinés à n nœuds

$$F = \mathbb{Q}[\sqcup F_n]$$

- le produit $*$ est l'union des forêts

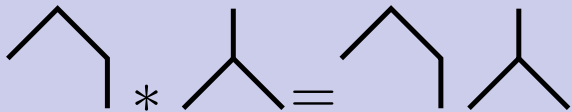
Algèbre des forêts d'arbres

[Connes-Kreimer]

F_n ensemble des forêts d'arbres enracinés à n nœuds

$$F = \mathbb{Q}[\sqcup F_n]$$

- le produit $*$ est l'union des forêts



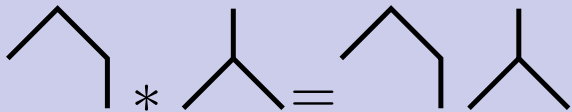
Algèbre des forêts d'arbres

[Connes-Kreimer]

F_n ensemble des forêts d'arbres enracinés à n nœuds

$$F = \mathbb{Q}[\sqcup F_n]$$

- le produit $*$ est l'union des forêts



- $\Delta(T) = \sum_{c \text{ coupure de } T} A(c, T) \otimes B(c, T)$

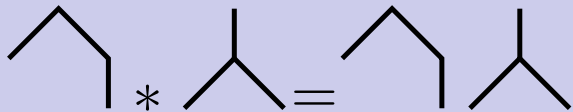
Algèbre des forêts d'arbres

[Connes-Kreimer]

F_n ensemble des forêts d'arbres enracinés à n nœuds

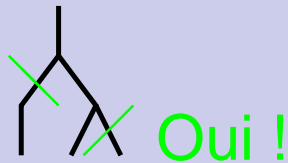
$$F = \mathbb{Q}[\sqcup F_n]$$

- le produit $*$ est l'union des forêts



- $\Delta(T) = \sum_{c \text{ coupure de } T} A(c, T) \otimes B(c, T)$

Coupure :



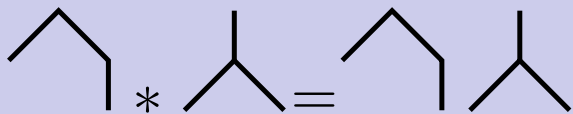
Algèbre des forêts d'arbres

[Connes-Kreimer]

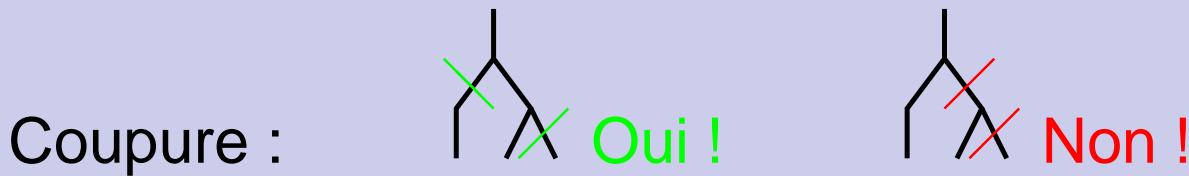
F_n ensemble des forêts d'arbres enracinés à n nœuds

$$F = \mathbb{Q}[\sqcup F_n]$$

- le produit $*$ est l'union des forêts



- $\Delta(T) = \sum_{c \text{ coupure de } T} A(c, T) \otimes B(c, T)$



$$\Delta \left(\begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} \right) = \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} \otimes \mathbf{1} + \begin{array}{c} | \\ \diagdown \end{array} \otimes \cdot + 2 \begin{array}{c} | \\ \cdot \end{array} \otimes \cdot + \begin{array}{c} | \\ \cdot \end{array} \otimes \cdot + \cdot \otimes \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} | \\ \cdot \end{array} \otimes \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} + 2 \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \cdot \end{array} \otimes \cdot + \mathbf{1} \otimes \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array}$$



Exemples

- $Q \hookrightarrow Y \hookrightarrow S \hookrightarrow P$
- Algèbre de Connes-Kreimer

Exemples

- $Q \hookrightarrow Y \hookrightarrow S \hookrightarrow P$
- Algèbre de Connes-Kreimer
- Algèbre de Grossman-Larson

Algèbre des arbres enracinés plans

[Grossman-Larson]

T_n ensemble des arbres enracinés plans à $n + 1$ nœuds

$$T = \mathbb{Q}[\sqcup T_n]$$

Algèbre des arbres enracinés plans

[Grossman-Larson]

T_n ensemble des arbres enracinés plans à $n + 1$ nœuds

$$T = \mathbb{Q}[\sqcup T_n]$$

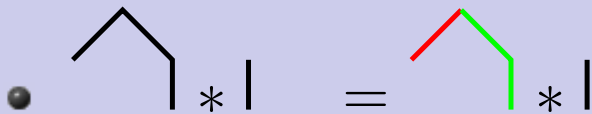


Algèbre des arbres enracinés plans

[Grossman-Larson]

T_n ensemble des arbres enracinés plans à $n + 1$ nœuds

$$T = \mathbb{Q}[\sqcup T_n]$$

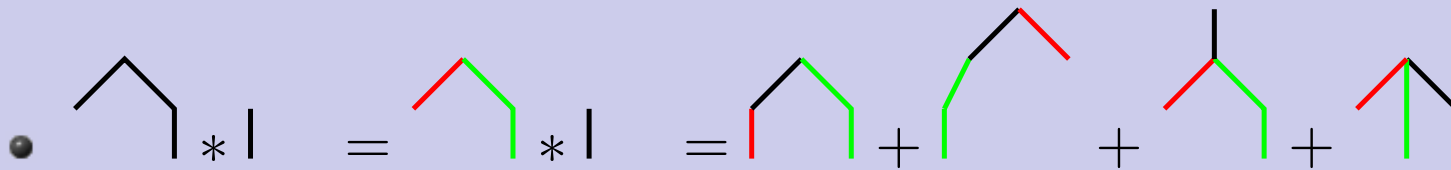


Algèbre des arbres enracinés plans

[Grossman-Larson]

T_n ensemble des arbres enracinés plans à $n + 1$ nœuds

$$T = \mathbb{Q}[\sqcup T_n]$$

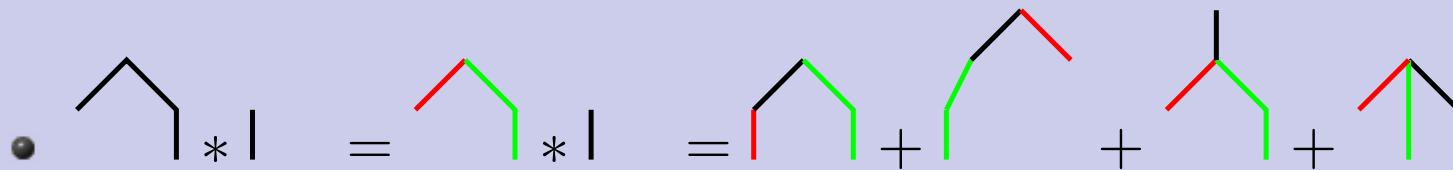


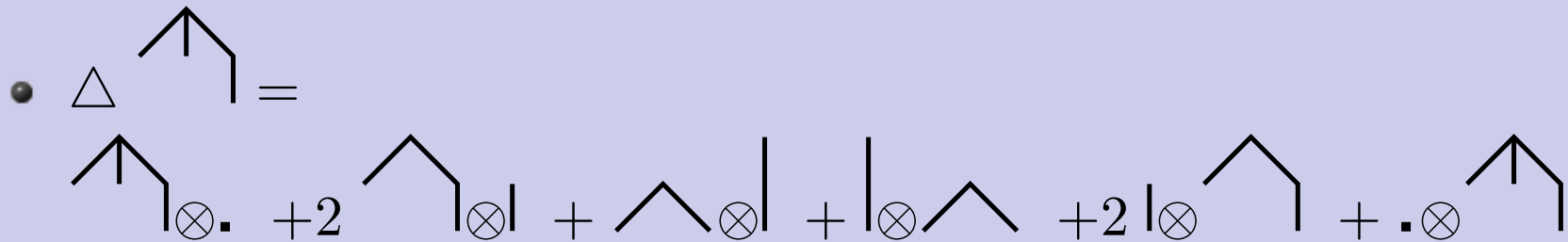
Algèbre des arbres enracinés plans

[Grossman-Larson]

T_n ensemble des arbres enracinés plans à $n + 1$ nœuds

$$T = \mathbb{Q}[\sqcup T_n]$$

• 

• 

Exemples

- $Q \hookrightarrow Y \hookrightarrow S \hookrightarrow P$
- Algèbre de Connes-Kreimer
- Algèbre de Grossman-Larson

Exemples

- $Q \hookrightarrow Y \hookrightarrow S \hookrightarrow P$
- Algèbre de Connes-Kreimer
- Algèbre de Grossman-Larson
- Algèbre des fonctions quasi-symétriques

Algèbre des fonctions quasi-symétriques

[Gessel]

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

α une composition de n $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_k)$

$$F_\alpha(X) = \sum_{j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_{a_1} < j_{a_1+1} \leq \dots \leq j_{a_1+a_2} < j_{a_1+a_2+1} \leq \dots \leq j_n} \left(\prod_{i=1}^n x_{j_i} \right)$$

Algèbre des fonctions quasi-symétriques

[Gessel]

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

α une composition de n $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_k)$

$$F_\alpha(X) = \sum_{j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_{a_1} < j_{a_1+1} \leq \dots \leq j_{a_1+a_2} < j_{a_1+a_2+1} \leq \dots \leq j_n} \left(\prod_{i=1}^n x_{j_i} \right)$$

$$\begin{aligned} F_{12}(X) = & x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_1x_4^2 + \dots + x_2x_3^2 + x_2x_4^2 + \dots \\ & + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_2x_3x_4 + \dots \end{aligned}$$

Algèbre des fonctions quasi-symétriques

[Gessel]

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

α une composition de n $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_k)$

$$F_\alpha(X) = \sum_{j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_{a_1} < j_{a_1+1} \leq \dots \leq j_{a_1+a_2} < j_{a_1+a_2+1} \leq \dots \leq j_n} \left(\prod_{i=1}^n x_{j_i} \right)$$

$$F_{12}(X) = x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_1x_4^2 + \dots + x_2x_3^2 + x_2x_4^2 + \dots \\ + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_2x_3x_4 + \dots$$

$$QSym = \mathbb{Q}[F_\alpha]$$

- $F_\alpha * \mathcal{F}_\beta = F_\alpha F_\beta$ (produit polynomial)



Algèbre des fonctions quasi-symétriques

[Gessel]

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

α une composition de n $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_k)$

$$F_\alpha(X) = \sum_{j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_{a_1} < j_{a_1+1} \leq \dots \leq j_{a_1+a_2} < j_{a_1+a_2+1} \leq \dots \leq j_n} \left(\prod_{i=1}^n x_{j_i} \right)$$

$$F_{12}(X) = x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_1x_4^2 + \dots + x_2x_3^2 + x_2x_4^2 + \dots \\ + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_2x_3x_4 + \dots$$

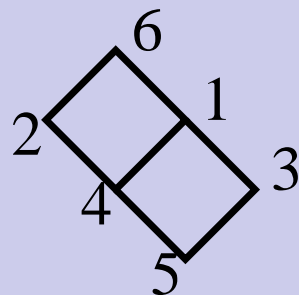
$$QSym = \mathbb{Q}[F_\alpha]$$

- $F_\alpha * \mathcal{F}_\beta = F_\alpha F_\beta$ (produit polynomial) Mais encore ??



P-Partitions

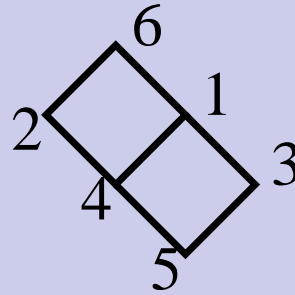
[Stanley]



P ordre partiel de $\{1, \dots, n\}$

P-Partitions

[Stanley]



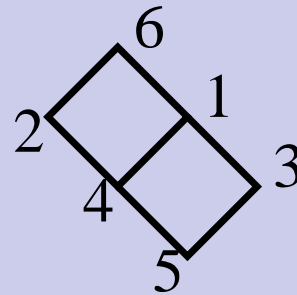
P ordre partiel de $\{1, \dots, n\}$

P-partition : $f : P \longrightarrow X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ telle que

- $i <_P j \implies f(i) \leq f(j)$
- $i <_P j$ et $i > j \implies f(i) < f(j)$

P-Partitions

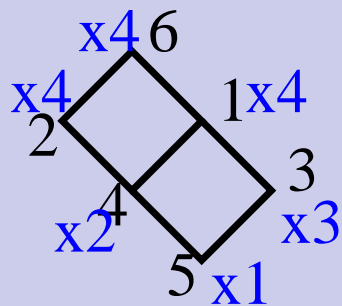
[Stanley]



P ordre partiel de $\{1, \dots, n\}$

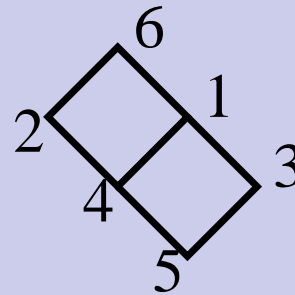
P-partition : $f : P \longrightarrow X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ telle que

- $i <_P j \implies f(i) \leq f(j)$
- $i <_P j$ et $i > j \implies f(i) < f(j)$



P-Partitions

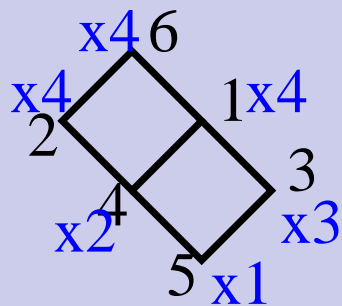
[Stanley]



P ordre partiel de $\{1, \dots, n\}$

P-partition : $f : P \longrightarrow X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ telle que

- $i <_P j \implies f(i) \leq f(j)$
- $i <_P j$ et $i > j \implies f(i) < f(j)$



$A(P)$ ensemble des P-partitions associées à P

P-Partitions

Exemples

1 2 3 ... n
● ● ● ● ● ● ●

P-Partitions

Exemples

$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & & \dots & & n \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{matrix} \longrightarrow$ compositions (en n parts)

P-Partitions

Exemples



→ compositions (en n parts)



P-Partitions

Exemples

1 2 3 ... n
● ● ● ● ● ● ● → compositions (en n parts)

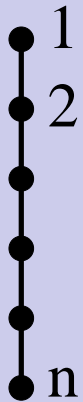
n
●
●
●
●
●
2
●
1
● → partitions (en n parts)

P-Partitions

Exemples

1 2 3 ... n \longrightarrow compositions (en n parts)

 \longrightarrow partitions (en n parts)



P-Partitions

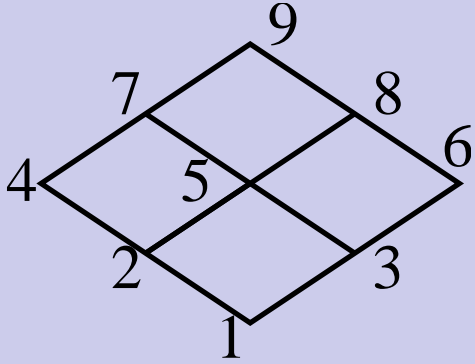
Exemples

1 2 3 ... n
● ● ● ● ● ● ● → compositions (en n parts)

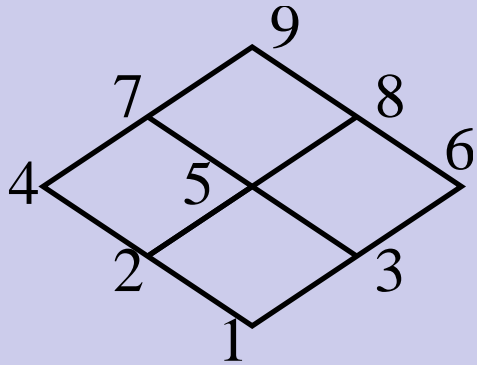
n
●
●
●
●
●
2
●
1
● → partitions (en n parts)

1
●
2
●
●
●
●
●
n
● → partitions en (n) parts distinctes

P-Partitions

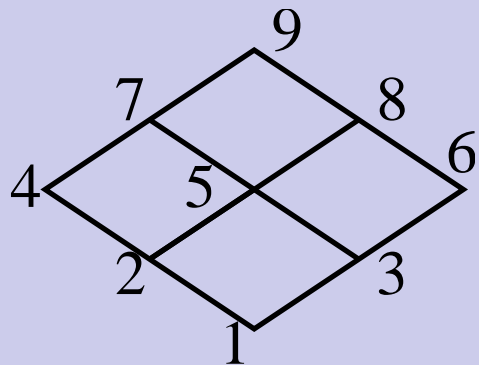


P-Partitions

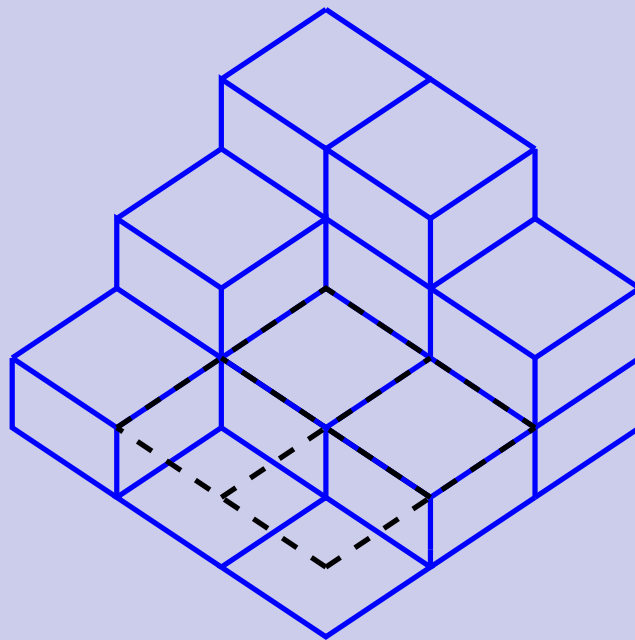


→ partitions planes

P-Partitions

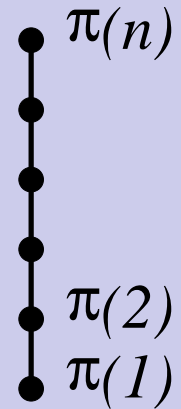


→ partitions planes



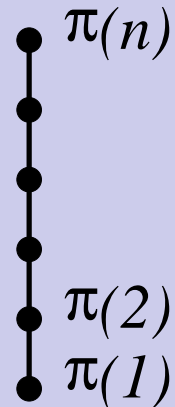
P-Partitions

$\pi \in S_n \longrightarrow$ ordre associé



P-Partitions

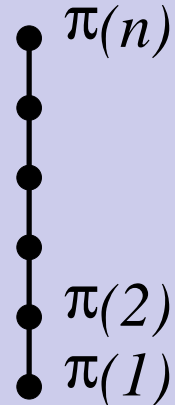
$\pi \in S_n \longrightarrow$ ordre associé



$$L(P) = \{\pi \in S_n / \pi \text{ étend } P\}$$

P-Partitions

$\pi \in S_n \longrightarrow$ ordre associé

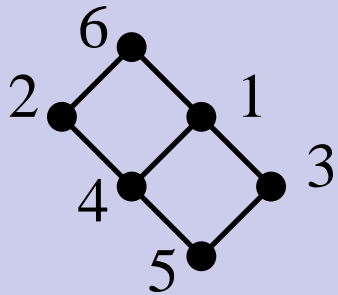


$$L(P) = \{\pi \in S_n / \pi \text{ étend } P\}$$

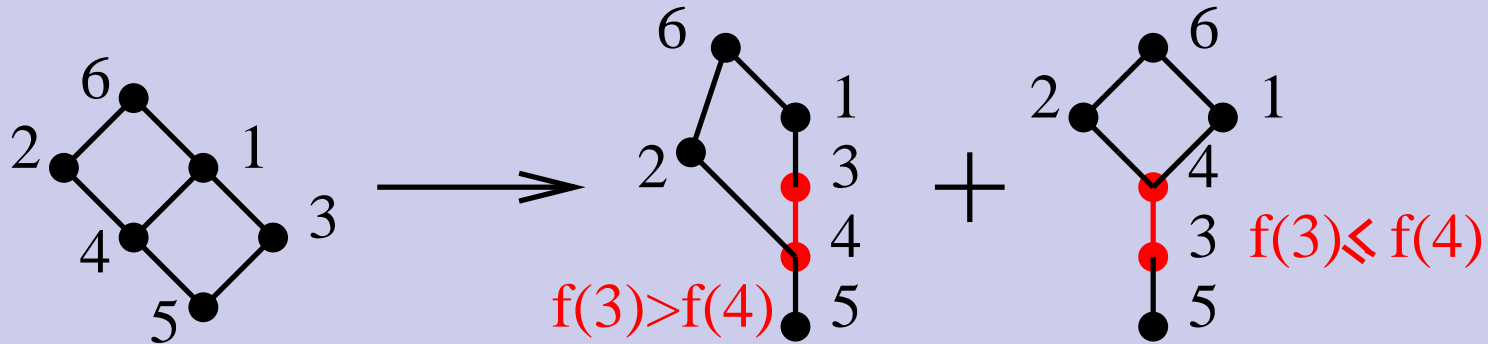
Théorème

$$A(P) = \bigcup_{\pi \in L(P)} A(\pi)$$

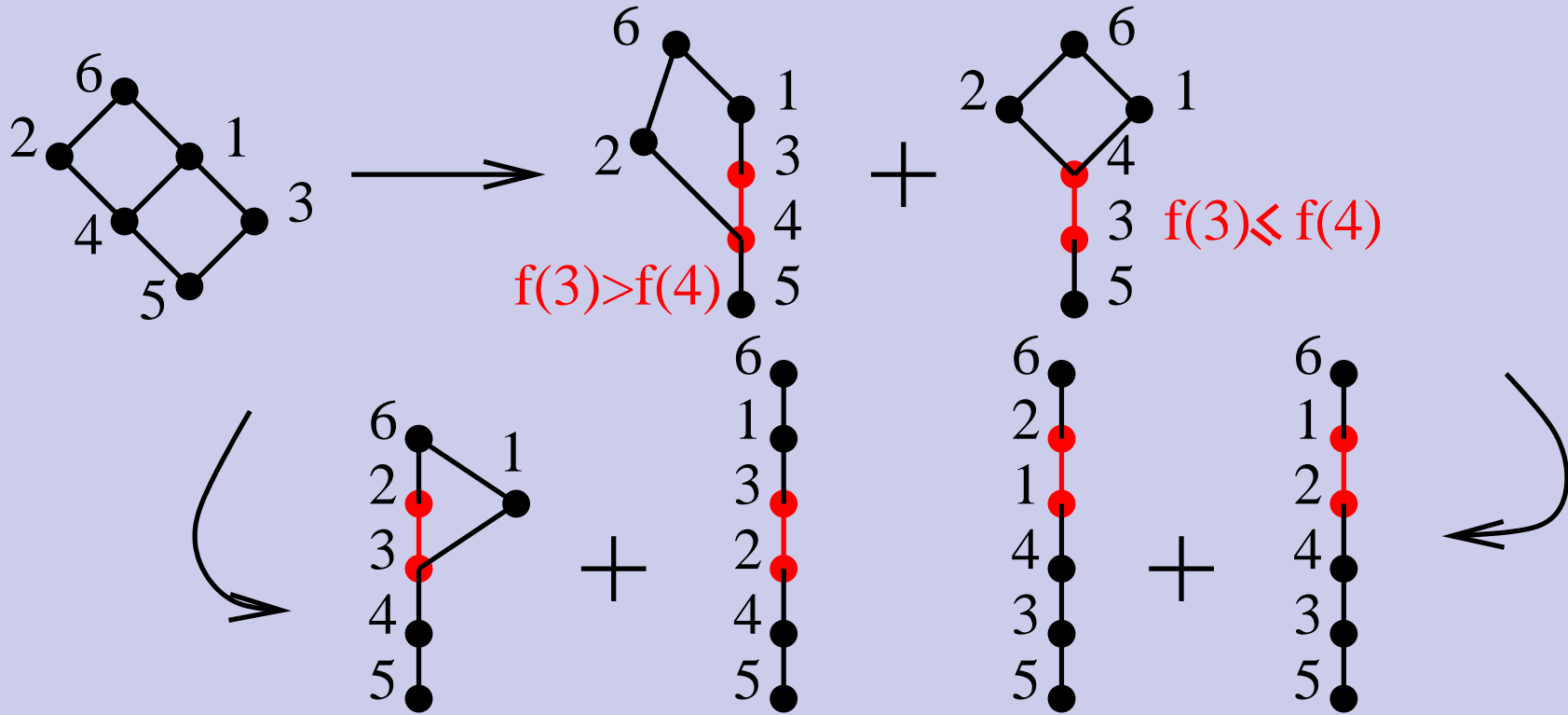
P-Partitions



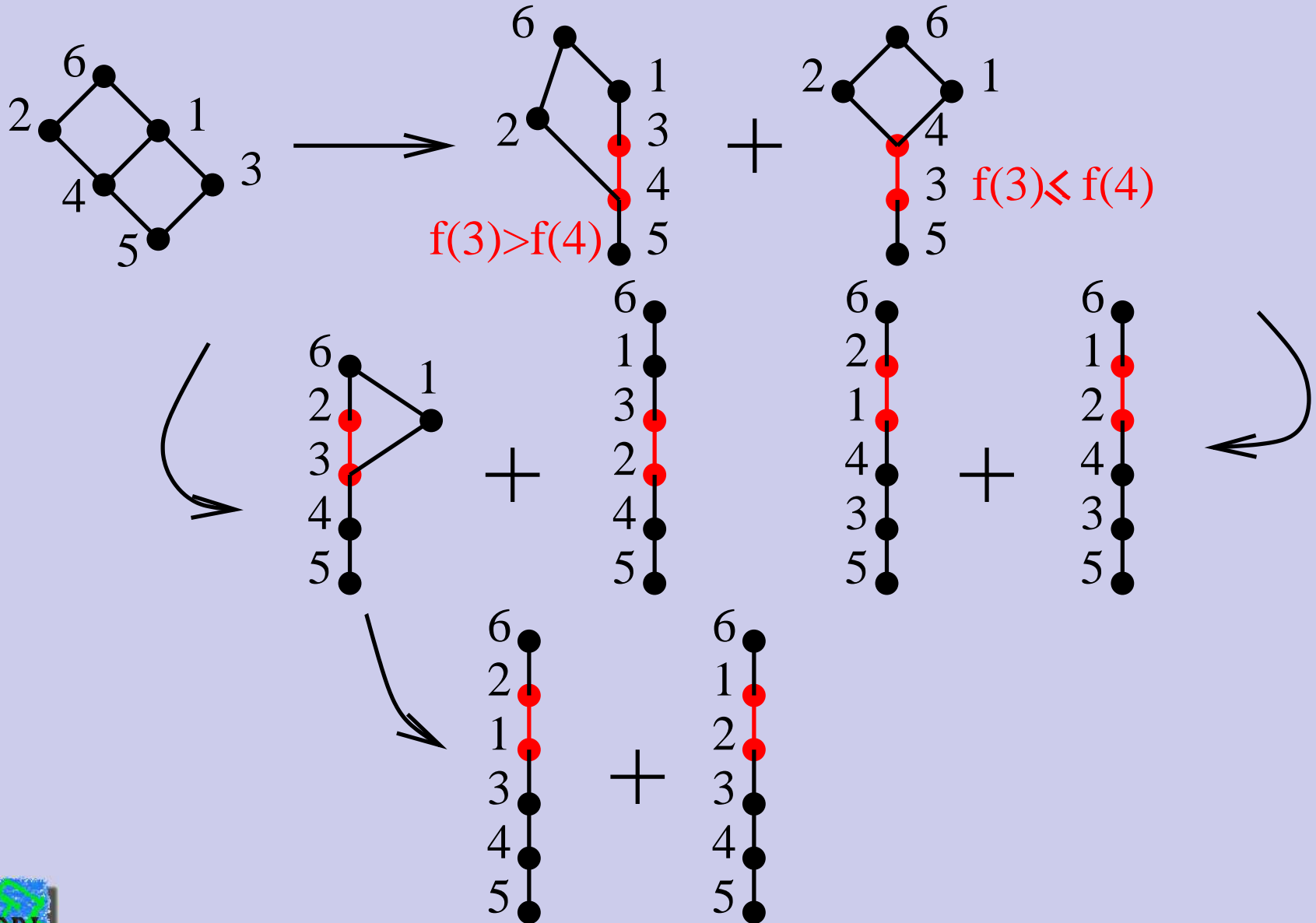
P-Partitions



P-Partitions



P-Partitions

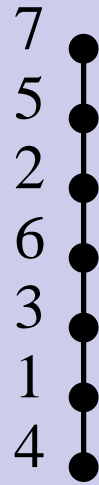


QSym et P-Partitions

$$F(P) = \sum_{f \in A(P)} \prod_{i=1}^n f(i)$$

QSym et P-Partitions

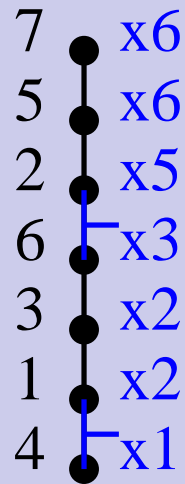
$$F(P) = \sum_{f \in A(P)} \prod_{i=1}^n f(i)$$



Pour $P = \pi$

QSym et P-Partitions

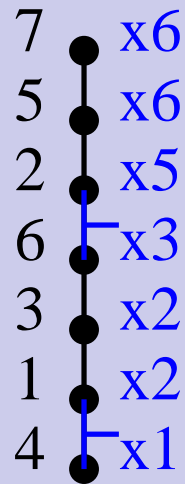
$$F(P) = \sum_{f \in A(P)} \prod_{i=1}^n f(i)$$



Pour $P = \pi$

QSym et P-Partitions

$$F(P) = \sum_{f \in A(P)} \prod_{i=1}^n f(i)$$

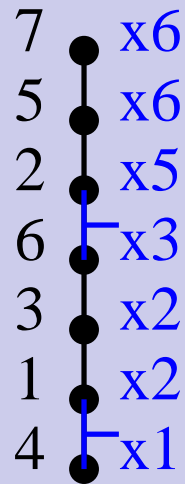


Pour $P = \pi$

$$F(\pi) = F_{133}(X)$$

QSym et P-Partitions

$$F(P) = \sum_{f \in A(P)} \prod_{i=1}^n f(i)$$



Pour $P = \pi$

$$F(\pi) = F_{133}(X)$$

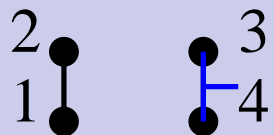
$$F(\pi) = F_{\alpha}(X) \quad \text{Des}(\pi) = \{a_1, a_1 + a_2, \dots\}$$

QSym et P-Partitions

Ainsi, pour multiplier : $F_2 \times F_{11}$

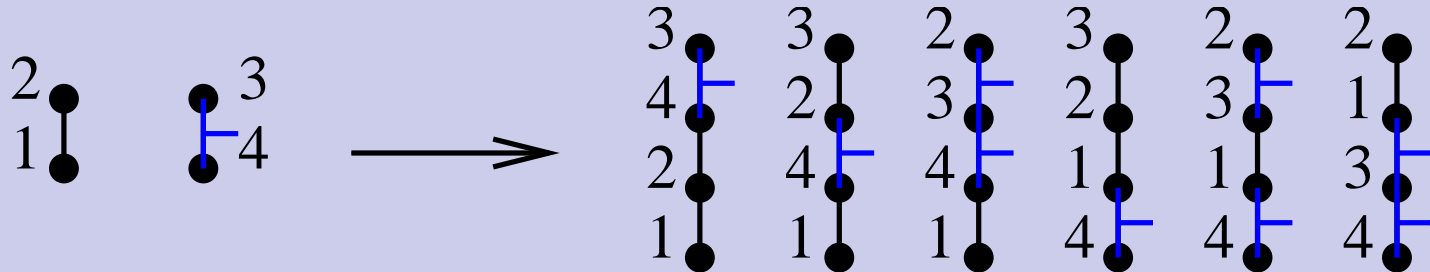
QSym et P-Partitions

Ainsi, pour multiplier : $F_2 \times F_{11}$



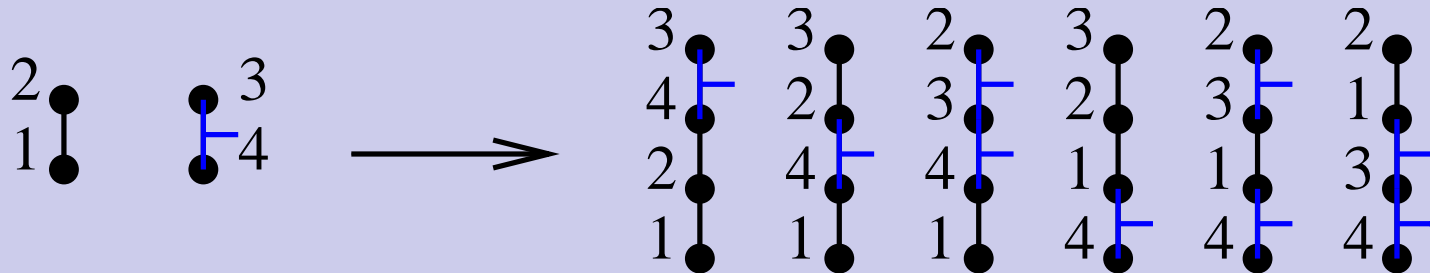
QSym et P-Partitions

Ainsi, pour multiplier : $F_2 \times F_{11}$



QSym et P-Partitions

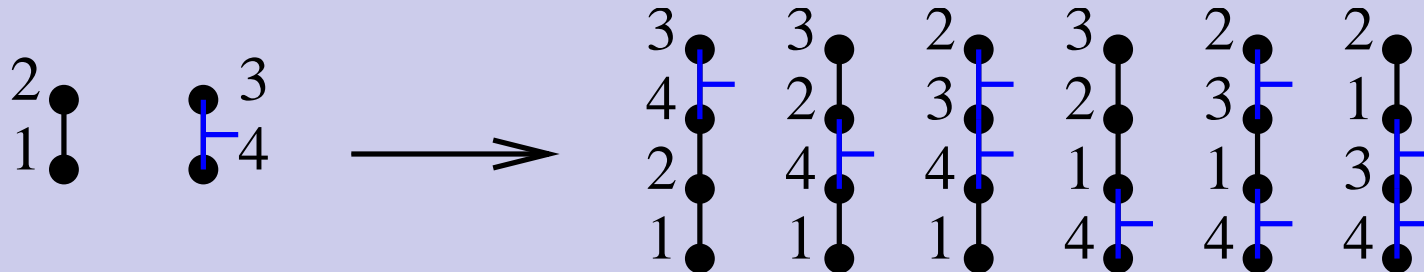
Ainsi, pour multiplier : $F_2 \times F_{11}$



$$F_2 \times F_{11} = F_{31} + F_{22} + F_{211} + F_{13} + F_{121} + F_{112}$$

QSym et P-Partitions

Ainsi, pour multiplier : $F_2 \times F_{11}$



$$F_2 \times F_{11} = F_{31} + F_{22} + F_{211} + F_{13} + F_{121} + F_{112}$$

$$F_\alpha \times F_\beta = \sum_{\gamma \in \alpha \amalg \beta} F_\gamma$$

QSym et P-Partitions

Et pour comultiplier :



QSym et P-Partitions

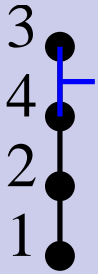
Et pour comultiplier :

$$\Delta F_\gamma = \sum_{\alpha, \beta = \text{coupure de } \gamma} F_\alpha \otimes F_\beta$$

QSym et P-Partitions

Et pour comultiplier :

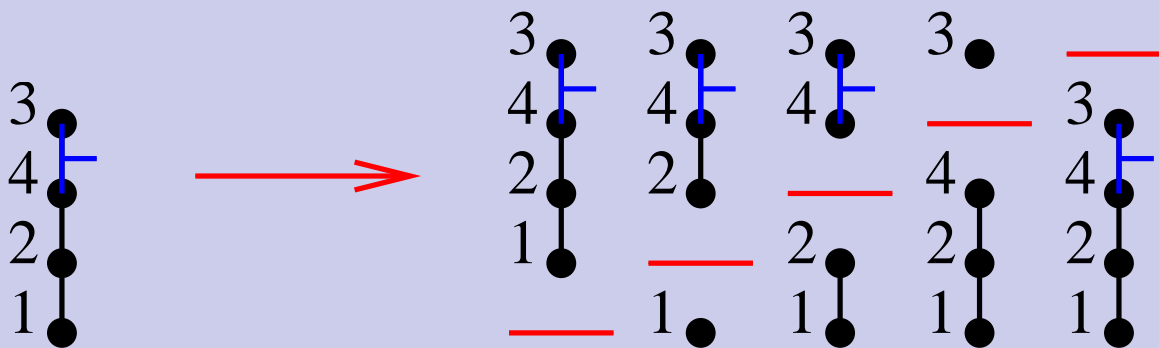
$$\Delta F_\gamma = \sum_{\alpha, \beta = \text{coupure de } \gamma} F_\alpha \otimes F_\beta$$



QSym et P-Partitions

Et pour comultiplier :

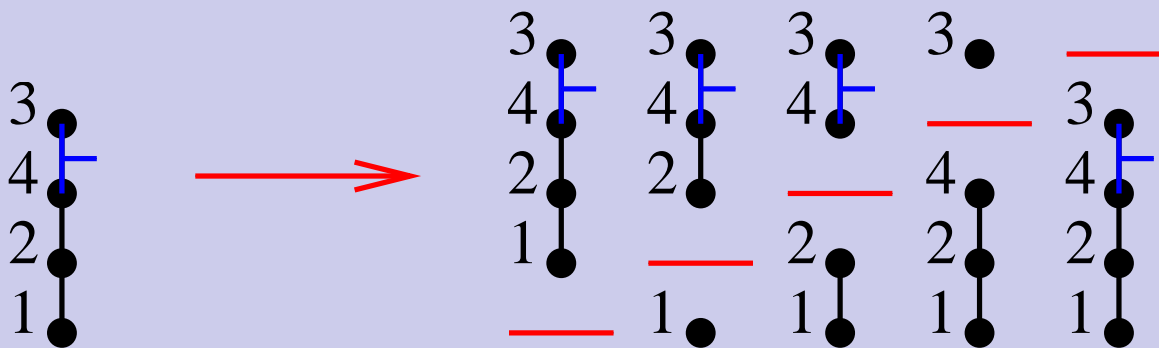
$$\Delta F_\gamma = \sum_{\alpha, \beta = \text{coupure de } \gamma} F_\alpha \otimes F_\beta$$



QSym et P-Partitions

Et pour comultiplier :

$$\Delta F_\gamma = \sum_{\alpha, \beta = \text{coupure de } \gamma} F_\alpha \otimes F_\beta$$



$$\Delta F_{31} = \mathbf{1} \otimes F_{31} + F_1 \otimes F_{21} + F_2 \otimes F_{11} + F_3 \otimes F_1 + F_{31} \otimes \mathbf{1}$$