

*Énumération d'ASM  
(quasi-)invariantes par  
quart-de-tour*

Jean-Christophe Aval, Philippe Duchon

LaBRI – 11-04-08

# Matrices à signes alternants (ASM)

# Matrices à signes alternants (ASM)

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & - & + & - & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & - & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

# Matrices à signes alternants (ASM)

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & - & + & - & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & - & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

taille  $l = 8$

# ASM invariantes par demi-tour (HTASM)

# ASM invariantes par demi-tour (HTASM)

taille paire  $2l = 6$

$$\begin{pmatrix} \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & - & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & - & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \end{pmatrix}$$

# ASM invariantes par demi-tour (HTASM)

taille paire  $2l = 6$

$$\begin{pmatrix} \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & - & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & - & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \end{pmatrix}$$

taille impaire  $2l + 1 = 5$

$$\begin{pmatrix} \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & - & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \end{pmatrix}$$

# ASM invariantes par quart-de-tour (QTASM)

# ASM invariantes par quart-de-tour (QTASM)

taille  $4l = 8$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & - & + \\ + & - & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

# ASM invariantes par quart-de-tour (QTASM)

taille  $4l = 8$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & - & + \\ + & - & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

taille  $4l + 1 = 5$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

# ASM invariantes par quart-de-tour (QTASM)

taille  $4l = 8$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & - & + \\ + & - & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

taille  $4l + 1 = 5$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

taille  $4l - 1 = 7$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & - & + & - & + & - & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

# ASM invariantes par quart-de-tour (QTASM)

taille  $4l = 8$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & - & + \\ + & - & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

taille  $4l + 2$  ??

taille  $4l + 1 = 5$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

taille  $4l - 1 = 7$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & - & + & - & + & - & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

# Énumération des QTASM

# Énumération des QTASM

$$A_{QT}(4l) = A(l)^2 \times A_{HT}(2l)$$

$$A_{QT}(4l - 1) = A(l)^2 \times A_{HT}(2l - 1)$$

$$A_{QT}(4l + 1) = A(l)^2 \times A_{HT}(2l + 1)$$

$$A_{QT}(4l + 2) = 0$$

# quasi-QTASM de taille $4l + 2$

# quasi-QTASM de taille $4l + 2$

taille  $4l + 2 = 6$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & - & + & \cdot \\ \cdot & + & - & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & - & + \\ + & - & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

# Énumération des QTASM

$$A_{QT}(4l) = A(l)^2 \times A_{HT}(2l)$$

$$A_{QT}(4l - 1) = A(l)^2 \times A_{HT}(2l - 1)$$

$$A_{QT}(4l + 1) = A(l)^2 \times A_{HT}(2l + 1)$$

$$A_{QT}(4l + 2) = 0$$

# Énumération des QTASM

$$A_{QT}(4l) = A(l)^2 \times A_{HT}(2l)$$

$$A_{QT}(4l - 1) = A(l)^2 \times A_{HT}(2l - 1)$$

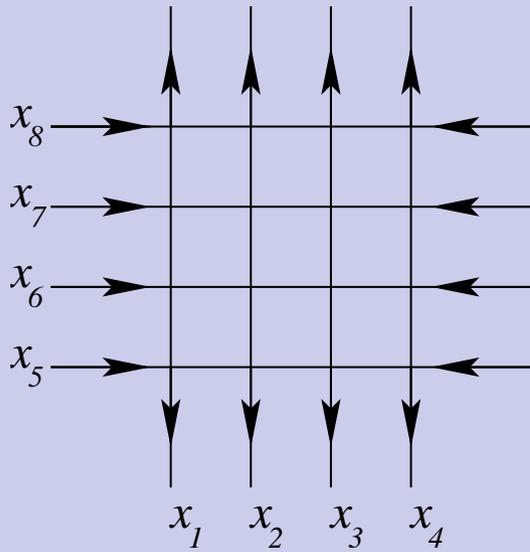
$$A_{QT}(4l + 1) = A(l)^2 \times A_{HT}(2l + 1)$$

$$A_{qQT}(4l + 2) = A(l) \times A(l + 1) \times A_{HT}(2l + 1)$$

# Glace carrée

# Glace carrée

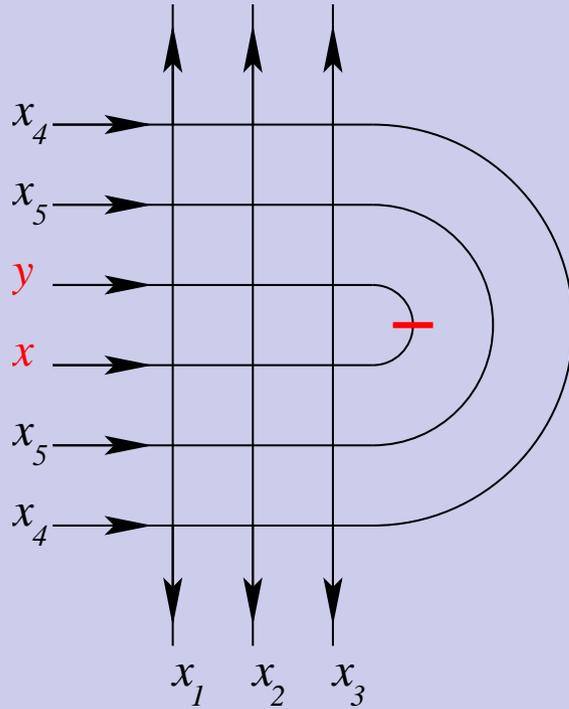
ASM de taille  $l = 4$



# Glace carrée HTS

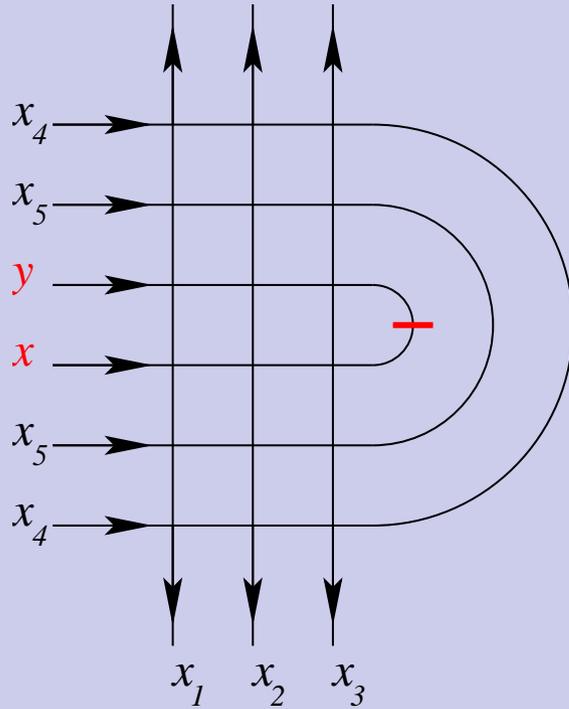
# Glace carrée HTS

HTASM de taille  $2l = 6$

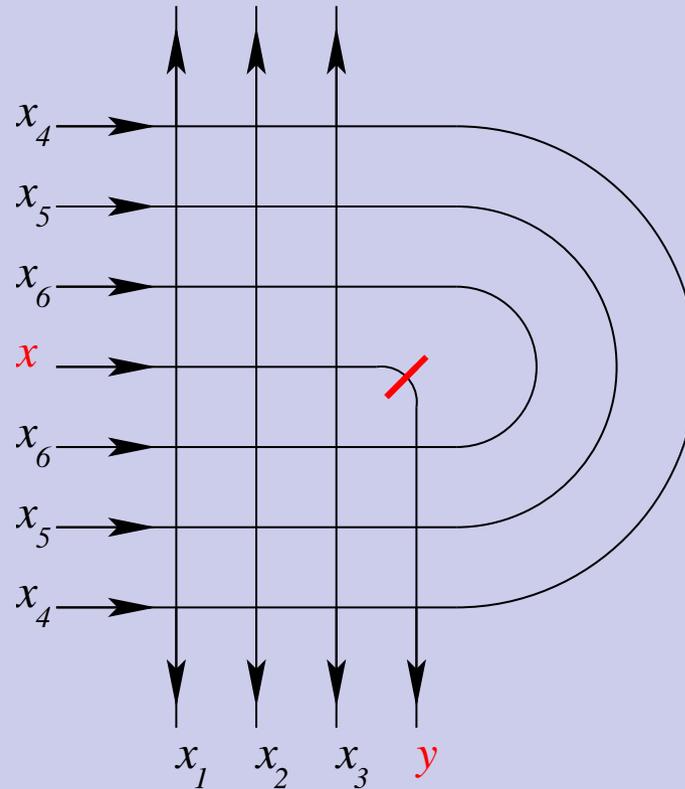


# Glace carrée HTS

HTASM de taille  $2l = 6$



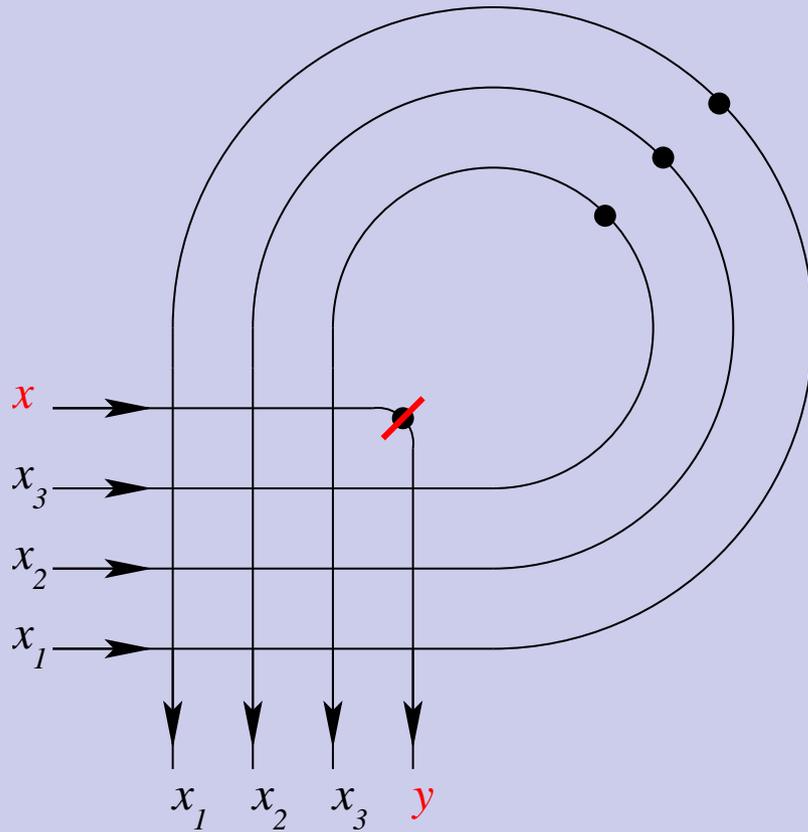
HTASM de taille  $2l + 1 = 7$



# Glace carrée QTS

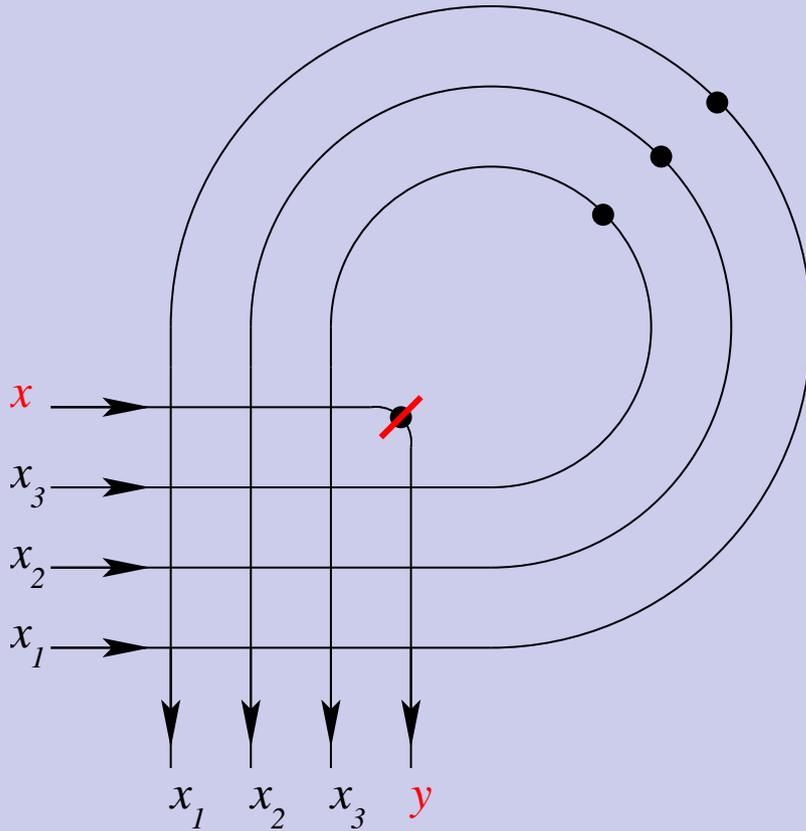
# Glace carrée QTS

QTASM de taille  $4l = 8$

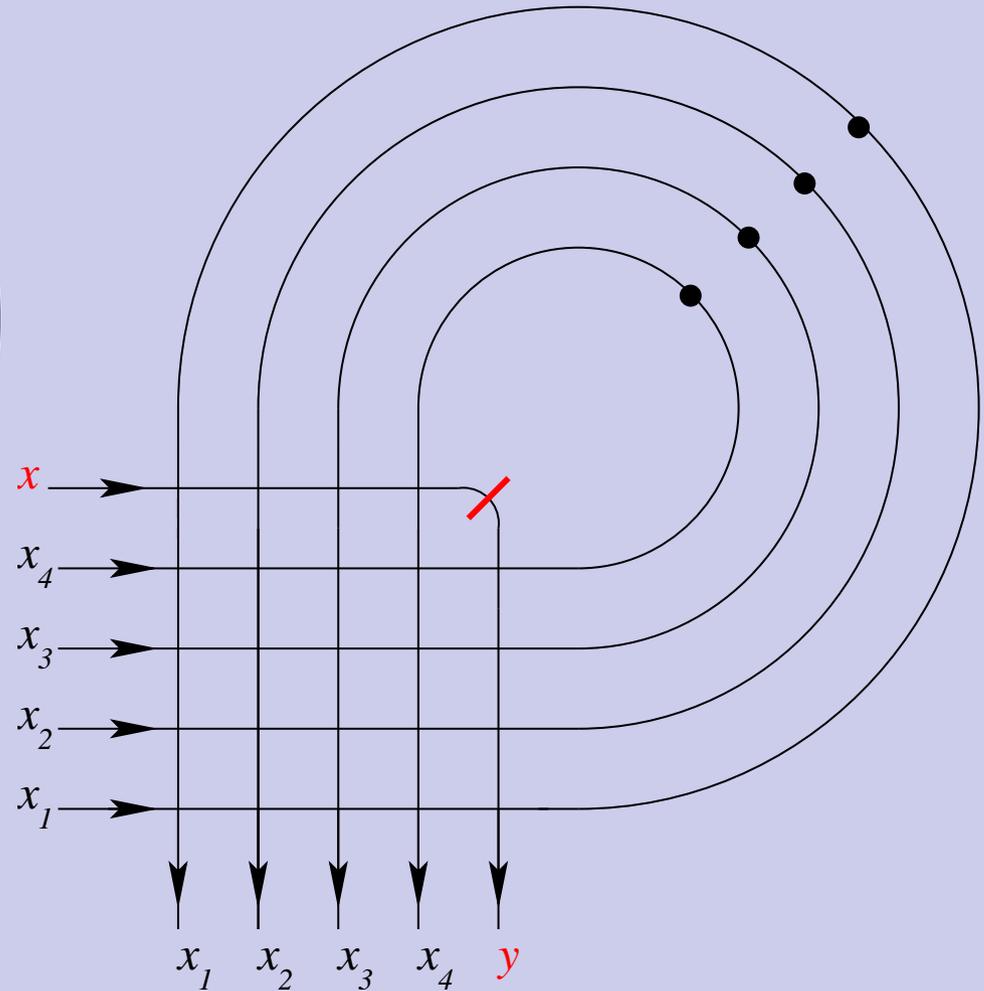


# Glace carrée QTS

QTASM de taille  $4l = 8$



qQTASM de taille  $4l + 2 = 10$



# Résultat principal

# Résultat principal

## Théorème

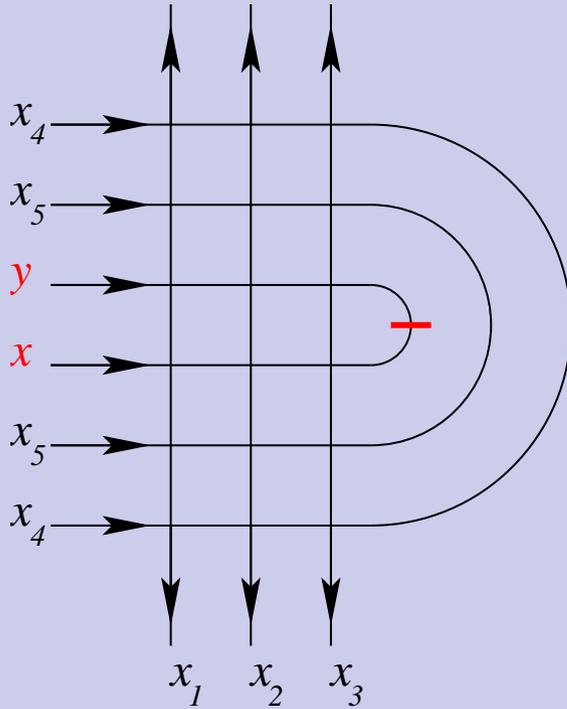
Pour  $a = e^{i\pi/3}$ , les fonctions de partition des modèles précédents sont reliés par :

$$Z_{QT}(4l; X_{2l-1}, (x, y)) = \sigma(a)^{-1} Z(l; X_{2l-1}, x) Z(l; X_{2l-1}, y) Z_{HT}(2l; X_{2l-1}, (x, y)),$$
$$Z_{QT}(4l + 2; X_{2l}, (x, y)) = \sigma(a)^{-1} Z(l; X_{2l}) Z(l + 1; X_{2l}, x, y) Z_{HT}(2l + 1; X_{2l}, (x, y)).$$

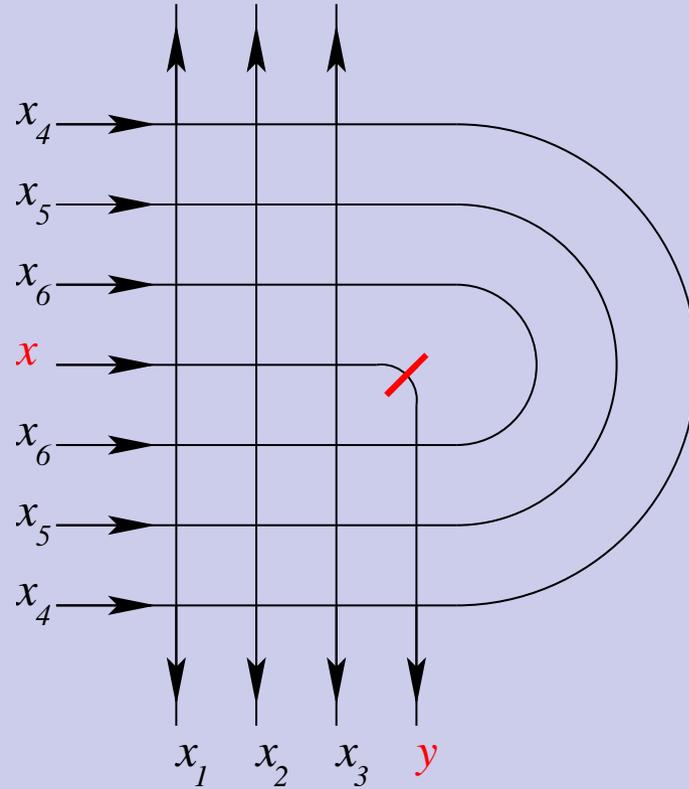
# Coupons la glace en deux - HTS

# Coupons la glace en deux - HTS

HTASM de taille  $2l = 6$



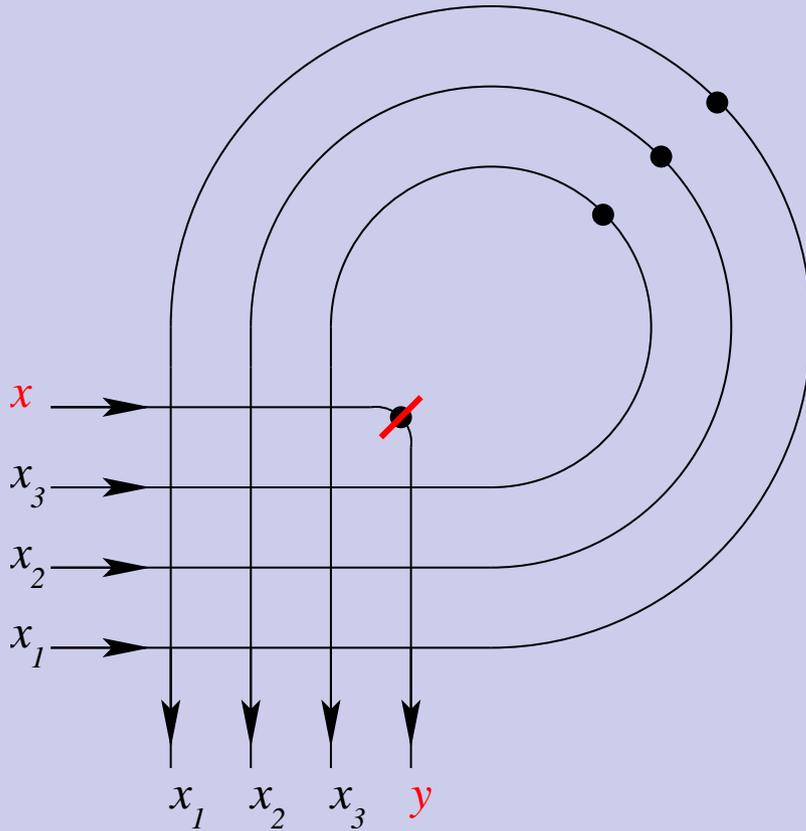
HTASM de taille  $2l + 1 = 7$



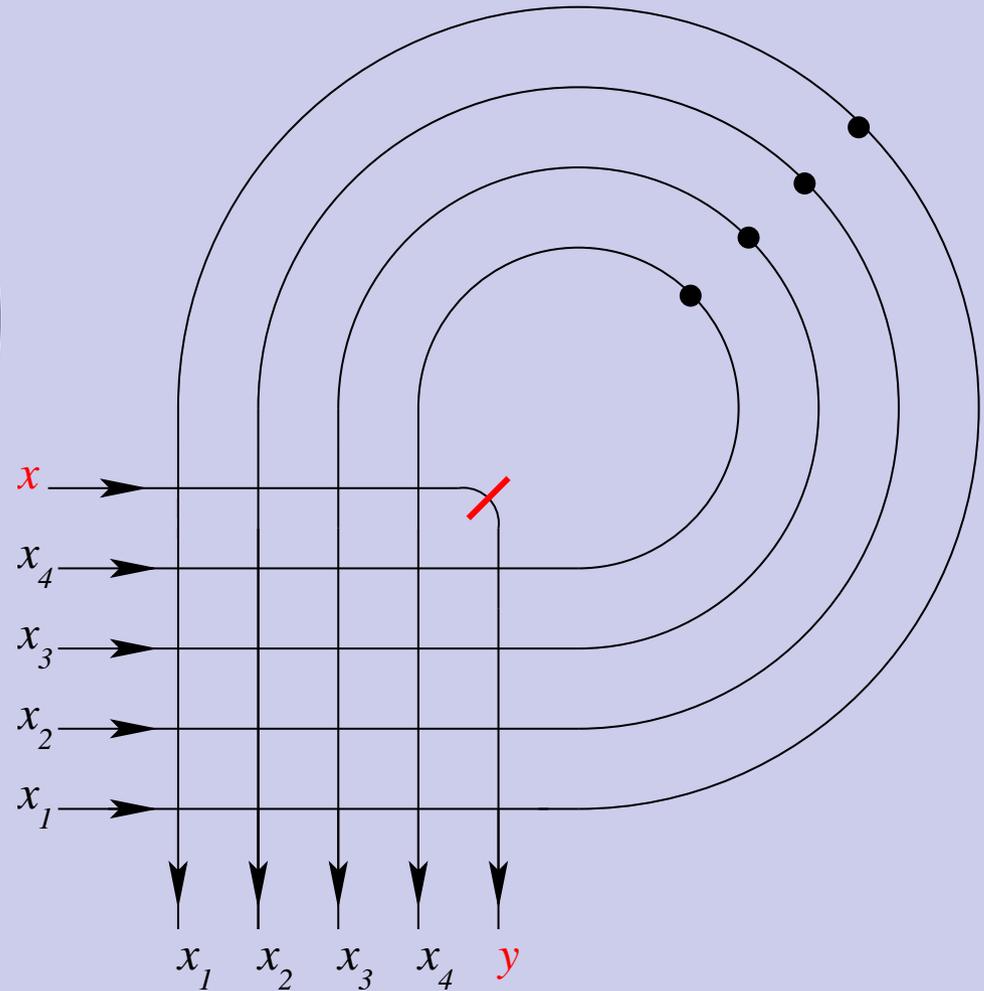
# Coupons la glace en deux - QTS

# Coupons la glace en deux - QTS

QTASM de taille  $4l = 8$



qQTASM de taille  $4l + 2 = 10$



# Ce qu'on va montrer

# Ce qu'on va montrer

Pour  $a = e^{i\pi/3}$ , les (demi-)fonctions de partition des modèles précédents sont reliés par :

$$\begin{aligned} Z_{QT}^+(4l; X_{2l-1}, (x, y)) &= \\ &\sigma(a)^{-1} Z(l; X_{2l-1}, x) Z(l; X_{2l-1}, y) Z_{HT}^+(2l; X_{2l-1}, (x, y)), \\ Z_{QT}^-(4l; X_{2l-1}, (x, y)) &= \\ &\sigma(a)^{-1} Z(l; X_{2l-1}, x) Z(l; X_{2l-1}, y) Z_{HT}^-(2l; X_{2l-1}, (x, y)), \\ Z_{QT}^+(4l + 2; X_{2l}, (x, y)) &= \\ &\sigma(a)^{-1} Z(l; X_{2l}) Z(l + 1; X_{2l}, x, y) Z_{HT}^+(2l + 1; X_{2l}, (x, y)), \\ Z_{QT}^-(4l + 2; X_{2l}, (x, y)) &= \\ &\sigma(a)^{-1} Z(l; X_{2l}) Z(l + 1; X_{2l}, x, y) Z_{HT}^-(2l + 1; X_{2l}, (x, y)). \end{aligned}$$

# Preuve (1/5) : largeurs des polynômes de Laurent

# Preuve (1/5) : largeurs des polynômes de Laurent

Toutes les fonctions de partition considérées sont des polynômes de Laurent en  $x$  pairs ou impairs,

# Preuve (1/5) : largeurs des polynômes de Laurent

Toutes les fonctions de partition considérées sont des polynômes de Laurent en  $x$  pairs ou impairs, et leur (demi-)largeur est :

- pour  $L_1^+$  et  $R_1^+$  :  $2l - 2$ ,
- pour  $L_1^-$  et  $R_1^-$  :  $2l - 1$ ,
- pour  $L_2^+$  et  $R_2^+$  :  $2l - 1$ ,
- pour  $L_2^-$  et  $R_2^-$  :  $2l$ .

# Preuve (2/5) : symétries

## Preuve (2/5) : symétries

### Propriété 1 :

Toutes les fonctions de partition considérées sont symétriques en leurs variables  $(x_1, \dots, x_l)$ .

## Preuve (2/5) : symétries

### Propriété 1 :

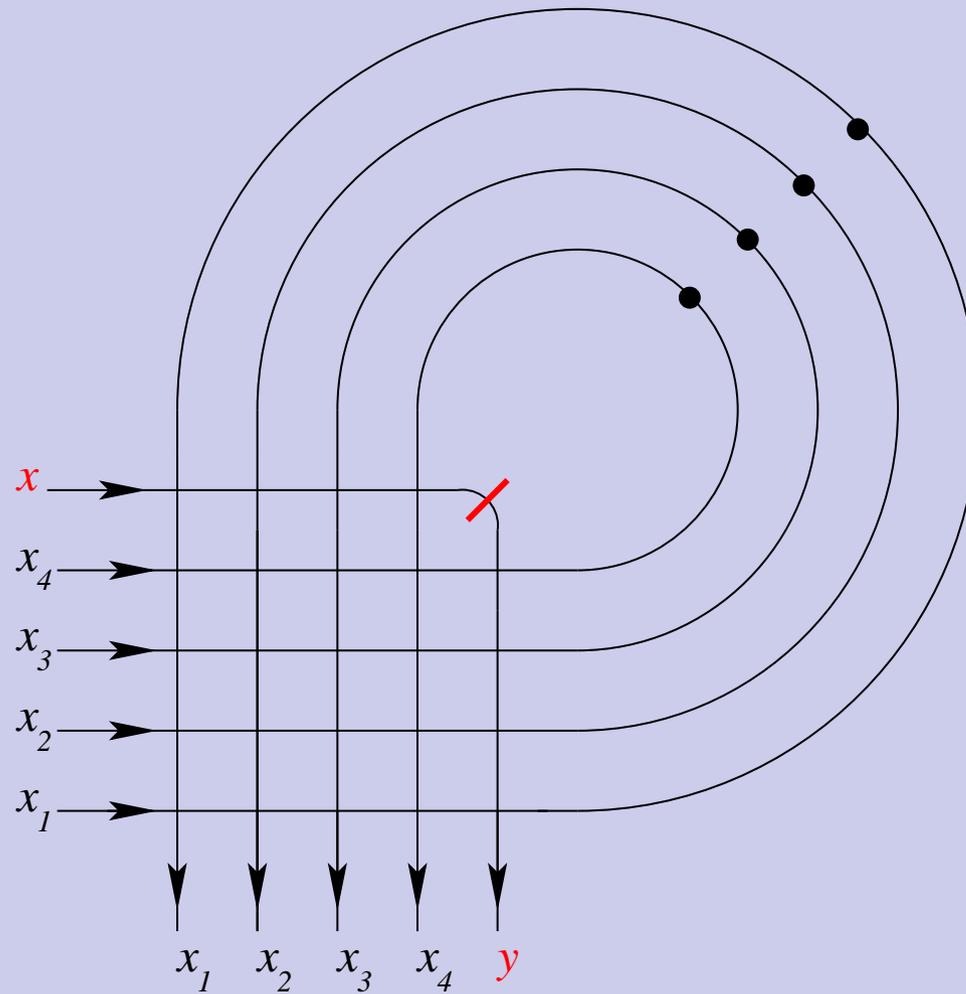
Toutes les fonctions de partition considérées sont symétriques en leurs variables  $(x_1, \dots, x_l)$ .

### Propriété 2 :

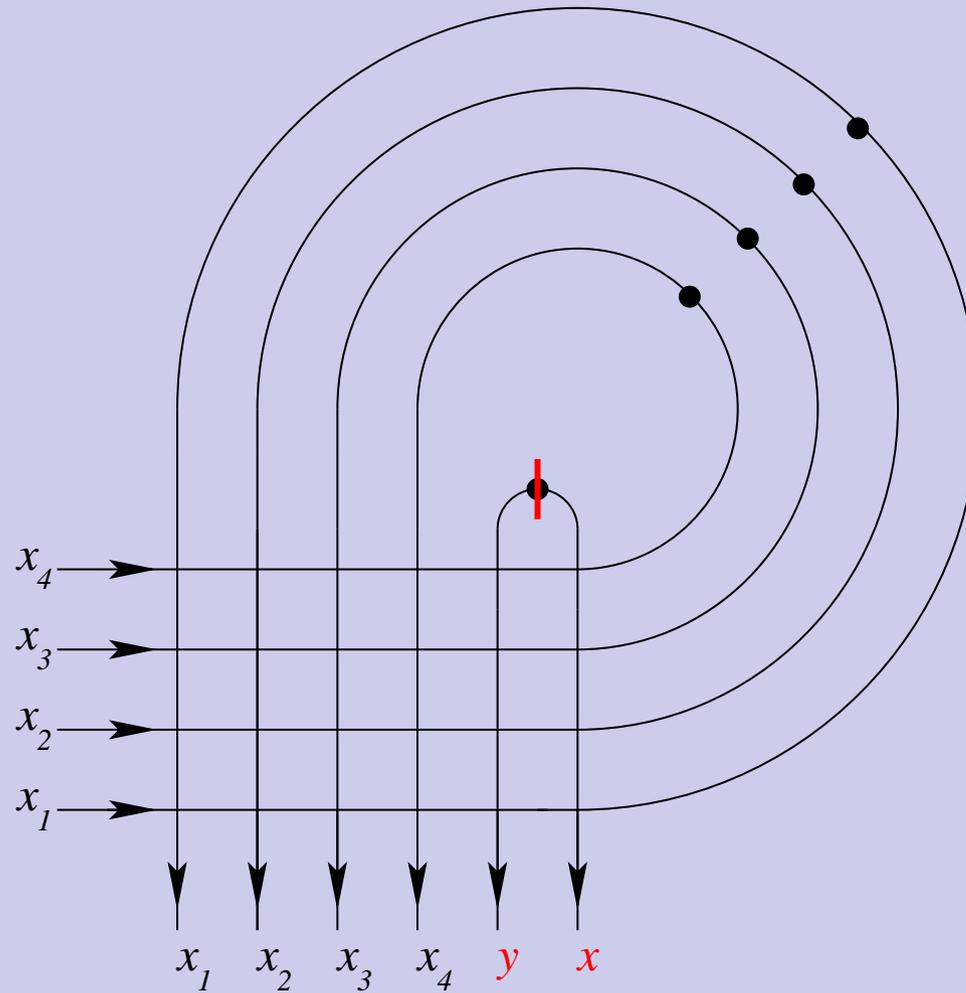
$Z_{QT}^{+,-}(4l + 2; X_{2l}, (x, y))$  et  $Z_{HT}^{+,-}(2l + 1; X_{2l}, (x, y))$  sont symétriques en  $(x, y)$ .

# Symétrie en $(x, y)$

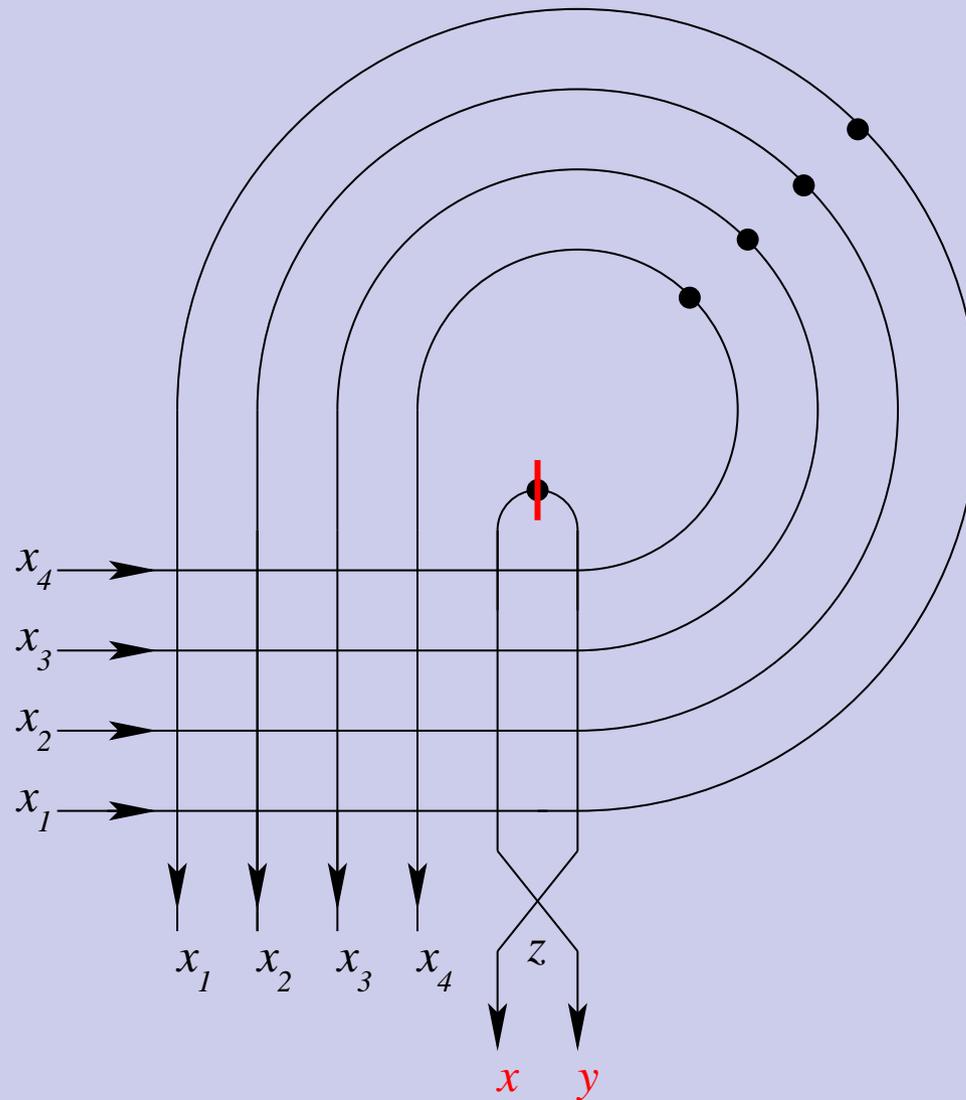
# Symétrie en $(x, y)$



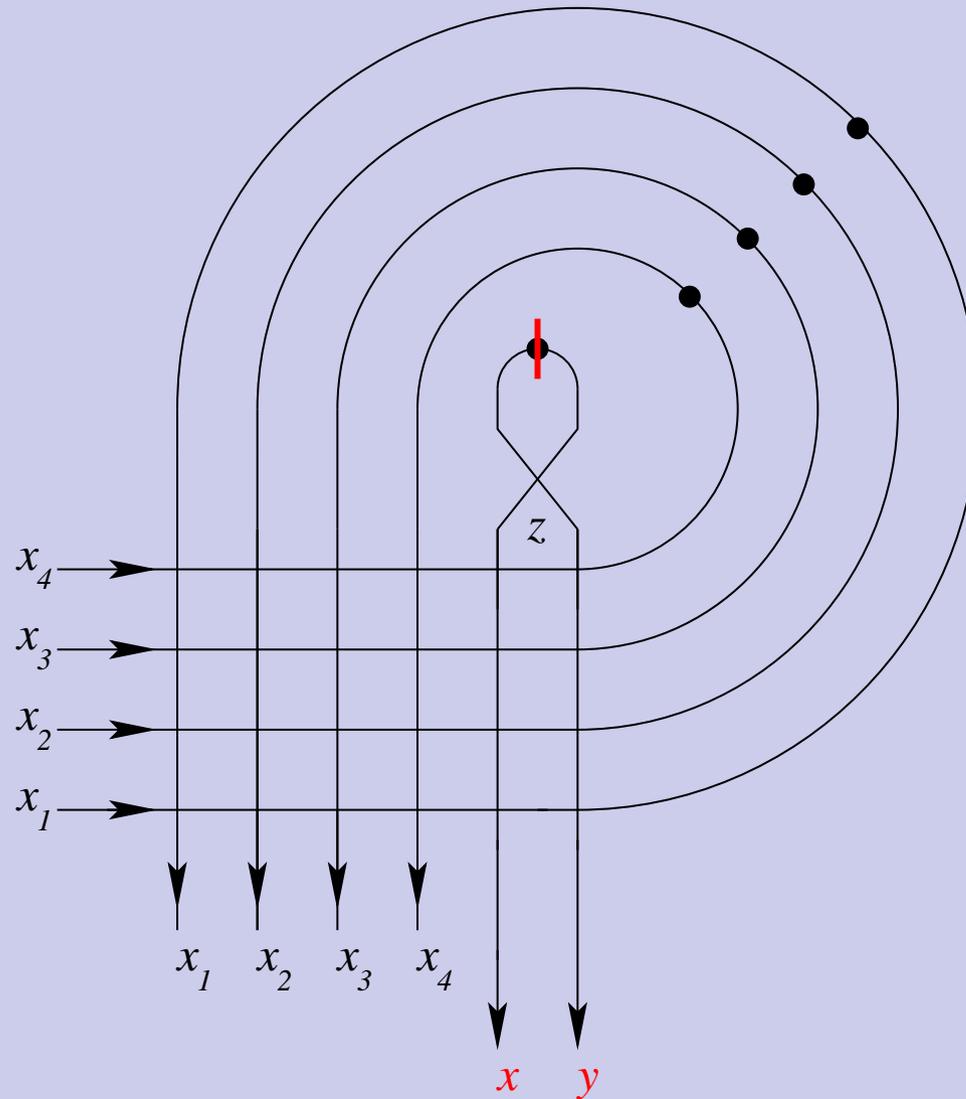
# Symétrie en $(x, y)$



# Symétrie en $(x, y)$



# Symétrie en $(x, y)$



## Preuve (2/5) : symétries

### Propriété 1 :

Toutes les fonctions de partition considérées sont symétriques en leurs variables  $(x_1, \dots, x_l)$ .

### Propriété 2 :

$Z_{QT}^{+,-}(4l + 2; X_{2l}, (x, y))$  et  $Z_{HT}^{+,-}(2l + 1; X_{2l}, (x, y))$  sont symétriques en  $(x, y)$ .

## Preuve (2/5) : symétries

### Propriété 1 :

Toutes les fonctions de partition considérées sont symétriques en leurs variables  $(x_1, \dots, x_l)$ .

### Propriété 2 :

$Z_{QT}^{+,-}(4l+2; X_{2l}, (x, y))$  et  $Z_{HT}^{+,-}(2l+1; X_{2l}, (x, y))$  sont symétriques en  $(x, y)$ .

### Propriété 3 :

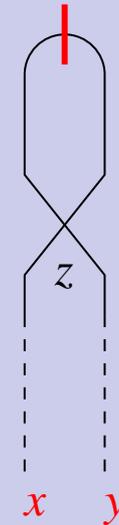
$Z_{QT}^{+,-}(4l; X_{2l-1}, (x, y))$  et  $Z_{HT}^{+,-}(2l; X_{2l-1}, (x, y))$  vérifient l'équation fonctionnelle :

$$F^{+,-}(x, y)\sigma(a^2 y \bar{x}) = F^{+,-}(y, x)\sigma(a^2) + F^{-,+}(y, x)\sigma(x \bar{y}).$$

# Pseudo-symétrie en $(x, y)$

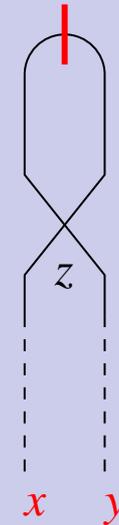
# Pseudo-symétrie en $(x, y)$

Dans le cas de  $F^+$  : le nœud supplémentaire



# Pseudo-symétrie en $(x, y)$

Dans le cas de  $F^+$  : le nœud supplémentaire

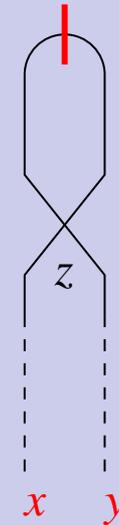


peut avoir deux orientations :

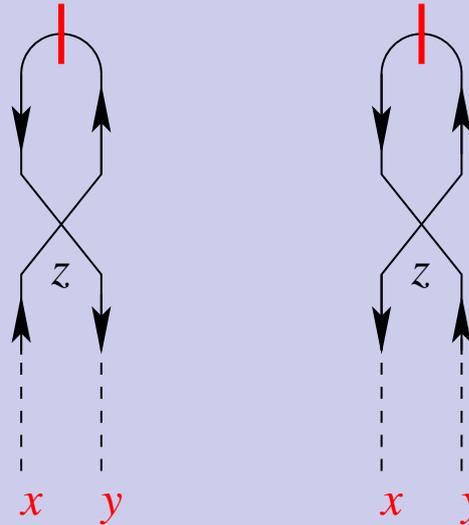


# Pseudo-symétrie en $(x, y)$

Dans le cas de  $F^+$  : le nœud supplémentaire



peut avoir deux orientations :



ce qui donne précisément :

$$F^{+,-}(x, y)\sigma(a^2 y\bar{x}) = F^{+,-}(y, x)\sigma(a^2) + F^{-,+}(y, x)\sigma(x\bar{y}).$$

# Preuve (2/5) : symétries

## Propriété 1 :

Toutes les fonctions de partition considérées sont symétriques en leurs variables  $(x_1, \dots, x_l)$ .

## Propriété 2 :

$Z_{QT}^{+,-}(4l+2; X_{2l}, (x, y))$  et  $Z_{HT}^{+,-}(2l+1; X_{2l}, (x, y))$  sont symétriques en  $(x, y)$ .

## Propriété 3 :

$Z_{QT}^{+,-}(4l; X_{2l-1}, (x, y))$  et  $Z_{HT}^{+,-}(2l; X_{2l-1}, (x, y))$  vérifient l'équation fonctionnelle :

$$F^{+,-}(x, y)\sigma(a^2 y \bar{x}) = F^{+,-}(y, x)\sigma(a^2) + F^{-,+}(y, x)\sigma(x \bar{y}).$$

# Preuve(3/5) : spécialisations

## Preuve(3/5) : spécialisations

$$\begin{aligned} Z(l; X_{2l-1}, ax_1) &= \sigma(a^2) \prod_{k=2}^l \sigma(a^2 x_1 \bar{x}_k) \prod_{k=l+1}^{2l-1} \sigma(ax_k \bar{x}_1) \\ &\quad \times Z(l-1; X_{2l-1} \setminus x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(l; X_{2l-1}, \bar{a}x_1) &= \sigma(a^2) \prod_{k=2}^l \sigma(a^2 x_k \bar{x}_1) \prod_{k=l+1}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k) \\ &\quad \times Z(l-1; X_{2l-1} \setminus x_1) \end{aligned}$$

## Preuve(3/5) : spécialisations

$$\begin{aligned} Z_{HT}^{+,-}(2l; X_{2l-1}, (\bar{a}x_1, y)) &= \sigma(a^2)\sigma(ax_1\bar{y}) \prod_{k=2}^l \sigma(a^2x_k\bar{x}_1) \prod_{k=l+1}^{2l-1} \sigma(ax_1\bar{x}_k) \\ &\times Z_{HT}^{+,-}(2l-1; X_{2l-1} \setminus x_1, (y, x_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{HT}^{+,-}(2l; X_{2l-1}, (x, ax_1)) &= \sigma(a^2)\sigma(ax\bar{x}_1) \prod_{k=2}^l \sigma(ax_k\bar{x}_1) \prod_{k=l+1}^{2l-1} \sigma(a^2x_1\bar{x}_k) \\ &\times Z_{HT}^{+,-}(2l-1; X_{2l-1} \setminus x_1, (x_1, x)) \end{aligned}$$

## Preuve(3/5) : spécialisations

$$\begin{aligned} Z_{HT}^{+,-}(2l+1; X_{2l}, (\bar{a}x_1, \mathbf{y})) &= \sigma(a^2) \prod_{k=1}^l \sigma(a^2 x_k \bar{x}_1) \prod_{k=l+1}^{2l} \sigma(ax_1 \bar{x}_k) \\ &\times Z_{HT}^{+,-}(2l; X_{2l} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{HT}^{+,-}(2l+1; X_{2l}, (ax_1, \mathbf{y})) &= \sigma(a^2) \prod_{k=2}^l \sigma(a^2 x_1 \bar{x}_k) \prod_{k=l+1}^{2l} \sigma(ax_k \bar{x}_1) \\ &\times Z_{HT}^{+,-}(2l; X_{2l} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \end{aligned}$$

## Preuve(3/5) : spécialisations

$$\begin{aligned} Z_{QT}^{+,-}(4l; X_{2l-1}, (\bar{a}x_1, \mathbf{y})) &= \sigma(a)\sigma(a^2)\sigma(ax_i\bar{y}) \left( \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(a^2 x_k \bar{x}_1) \sigma(ax_1 \bar{x}_k) \right) \\ &\times Z_{QT}^{+,-}(4(l-1); X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{QT}^{+,-}(4l; X_{2l-1}, (x, ax_1)) &= \sigma(a)\sigma(a^2)\sigma(ax\bar{x}_i) \left( \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(a^2 x_1 \bar{x}_k) \sigma(ax_k \bar{x}_1) \right) \\ &\times Z_{QT}^{+,-}(4(l-1); X_{2l-1} \setminus x_1, (x_1, \mathbf{x})) \end{aligned}$$

## Preuve(3/5) : spécialisations

$$\begin{aligned} Z_{QT}^{+,-}(4l+2; X_{2l}, (\bar{a}x_1, y)) &= \sigma(a)\sigma(a^2)\sigma(ax_i\bar{y}) \left( \prod_{k=2}^{2l} \sigma(a^2 x_k \bar{x}_1) \sigma(ax_1 \bar{x}_k) \right) \\ &\times Z_{QT}^{+,-}(4l-2; X_{2l} \setminus x_1, (y, x_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{QT}^{+,-}(4l+2; X_{2l}, (x, ax_1)) &= \sigma(a)\sigma(a^2)\sigma(ax\bar{x}_i) \left( \prod_{k=2}^{2l} \sigma(a^2 x_1 \bar{x}_k) \sigma(ax_k \bar{x}_1) \right) \\ &\times Z_{QT}^{+,-}(4l-2; X_{2l} \setminus x_1, (x_1, x)) \end{aligned}$$

# Preuve (3/5) : spécialisation supplémentaire

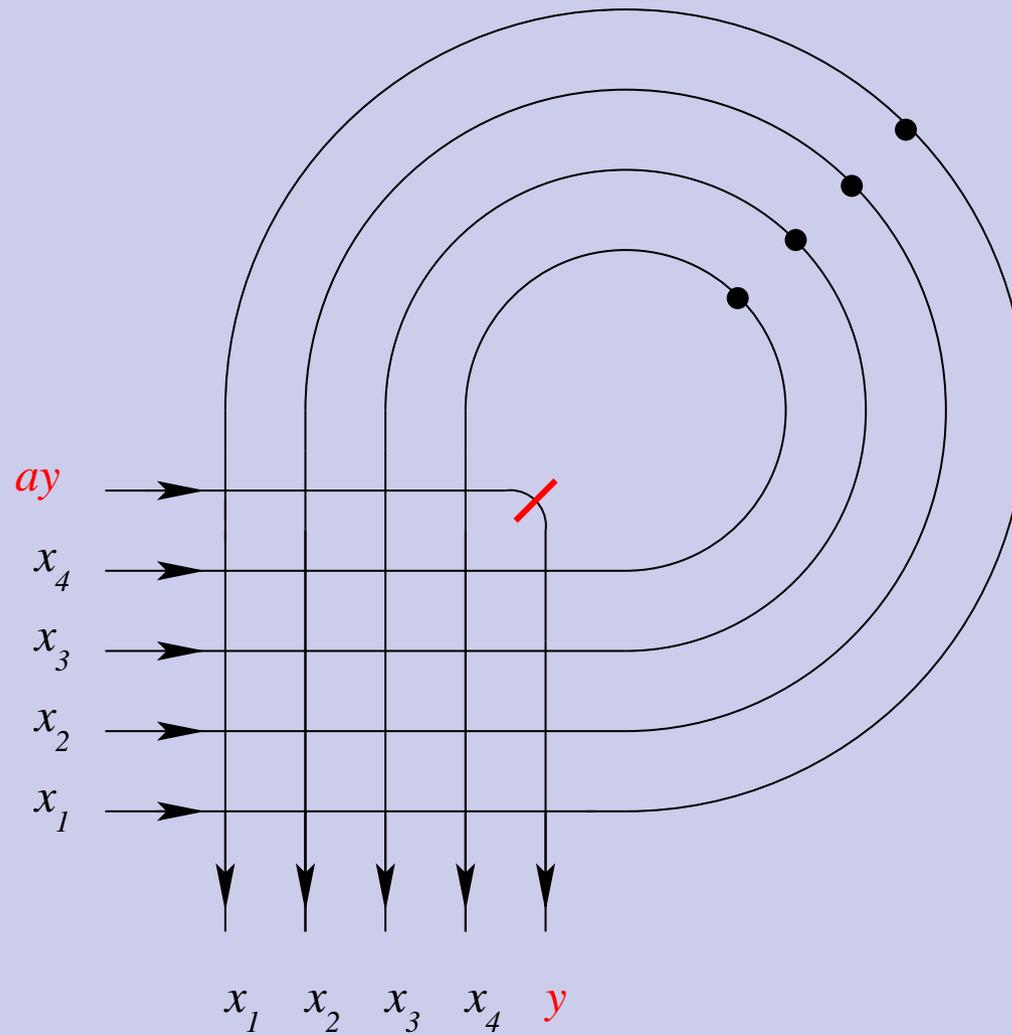
## Preuve (3/5) : spécialisation supplémentaire

$$Z_{QT}(4l + 2; X_{2l}, (ay, y)) = \sigma(a) \left( \prod_{k=1}^{2l} \sigma(a^2 y \bar{x}_k) \sigma(ax_k \bar{y}) \right) \\ \times Z_{QT}(4l; X_{2l} \setminus x_{2l}, (x_{2l}, x_{2l}))$$

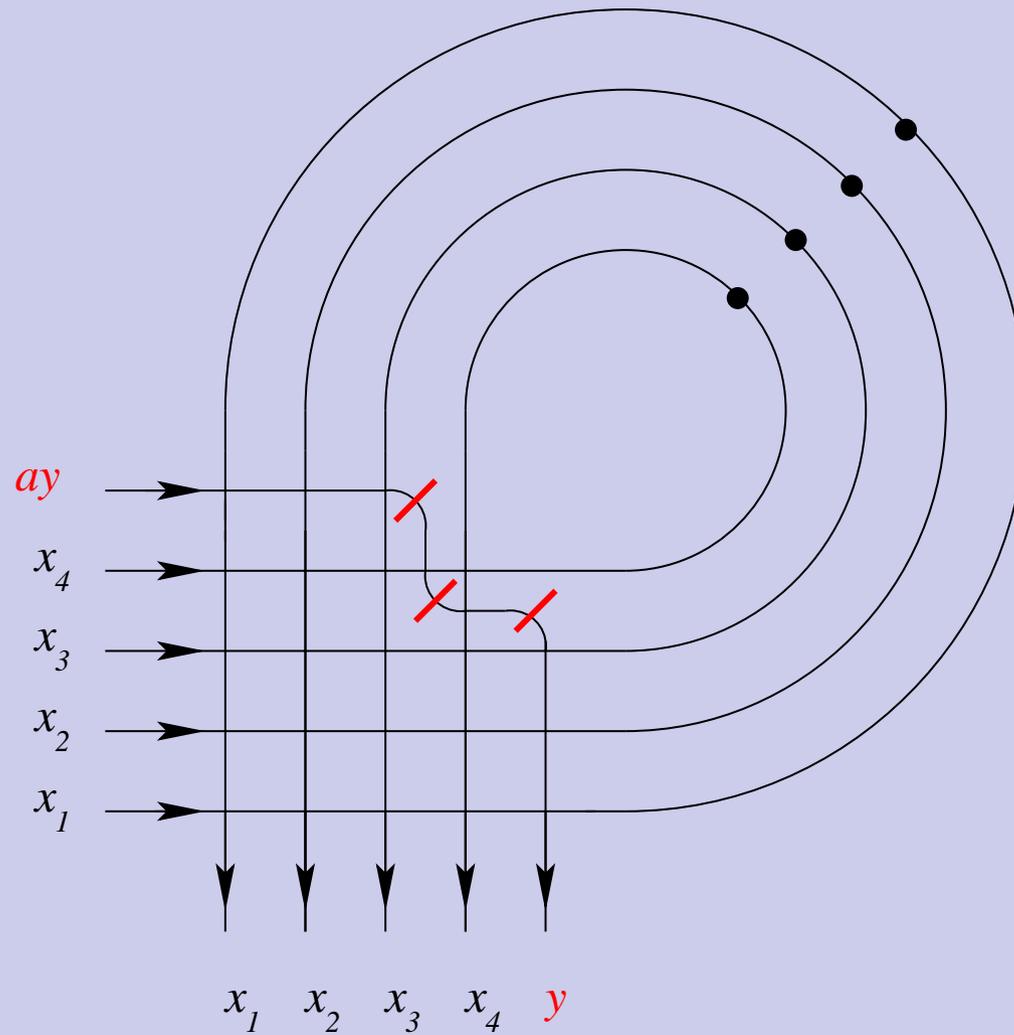
$$Z_{HT}(2l + 1; X_{2l}, (ay, y)) = \prod_{k=1}^l \sigma(a^2 y \bar{x}_k) \prod_{k=l+1}^{2l} \sigma(ax_k \bar{y}) \\ \times Z_{HT}(2l; X_{2l} \setminus x_{2l}, (x_{2l}, x_{2l}))$$

# Spécialisation supplémentaire

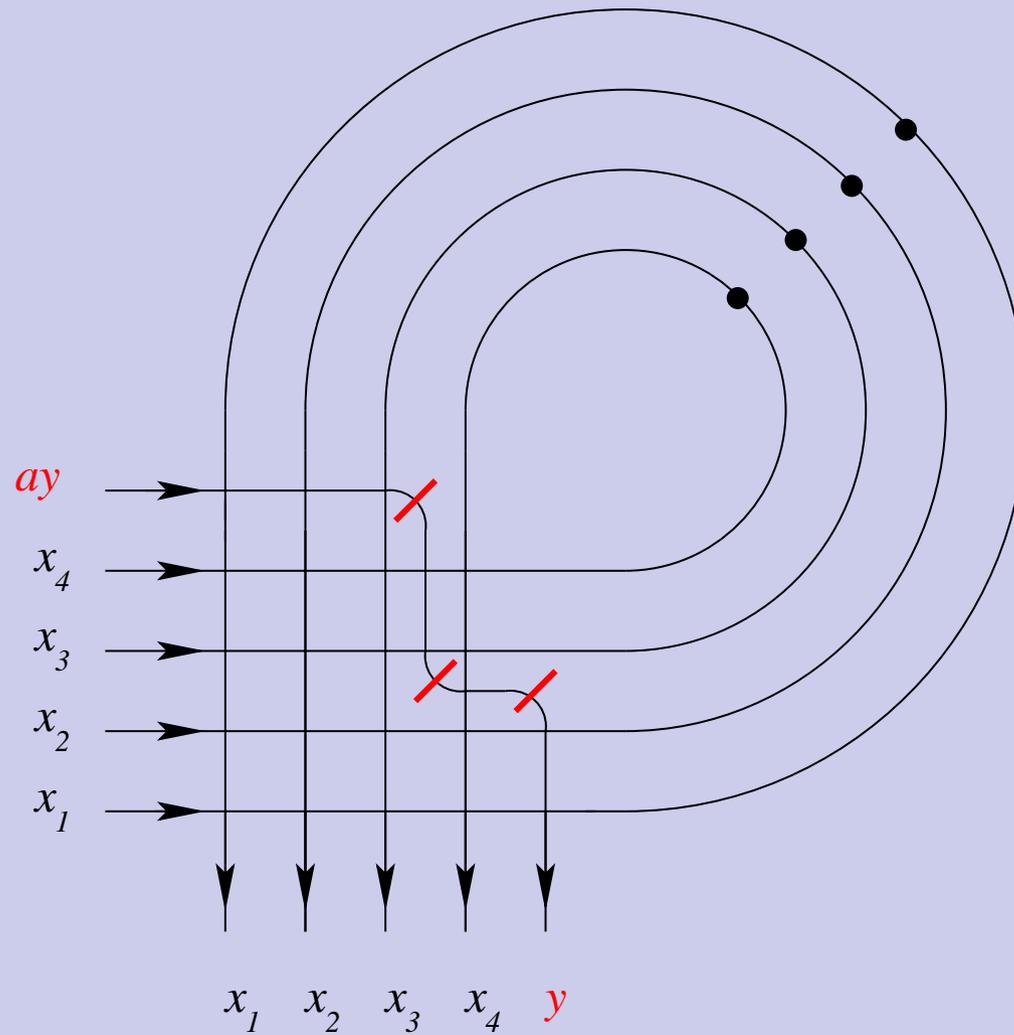
# Spécialisation supplémentaire



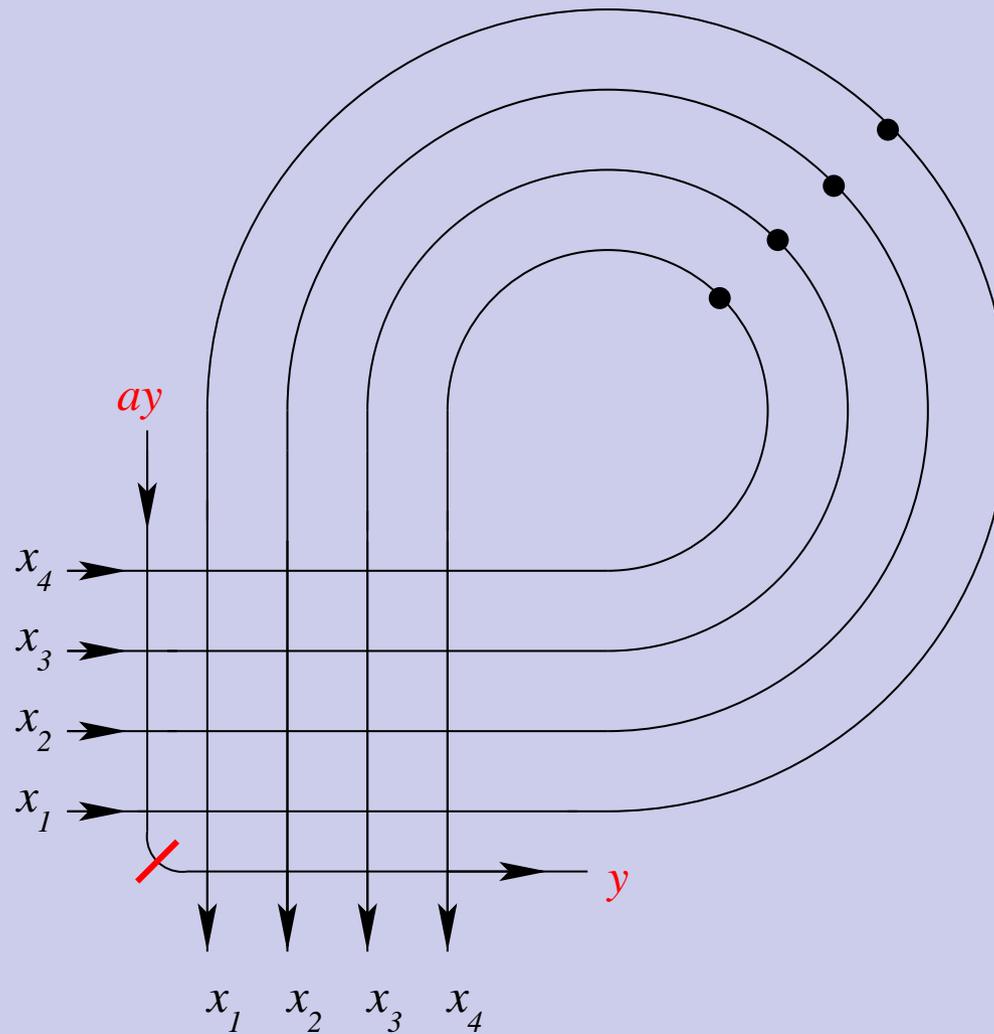
# Spécialisation supplémentaire



# Spécialisation supplémentaire



# Spécialisation supplémentaire



## Preuve (3/5) : spécialisation supplémentaire

$$Z_{QT}(4l + 2; X_{2l}, (ay, y)) = \sigma(a) \left( \prod_{k=1}^{2l} \sigma(a^2 y \bar{x}_k) \sigma(ax_k \bar{y}) \right) \\ \times Z_{QT}(4l; X_{2l} \setminus x_{2l}, (x_{2l}, x_{2l}))$$

$$Z_{HT}(2l + 1; X_{2l}, (ay, y)) = \prod_{k=1}^l \sigma(a^2 y \bar{x}_k) \prod_{k=l+1}^{2l} \sigma(ax_k \bar{y}) \\ \times Z_{HT}(2l; X_{2l} \setminus x_{2l}, (x_{2l}, x_{2l}))$$

**Preuve (4/5) :  $a = e^{i\pi/3}$**

## Preuve (4/5) : $a = e^{i\pi/3}$

Théorème (Stroganov) :

Pour  $a = e^{i\pi/3}$ ,  $Z$  est symétrique en **toutes** ses variables.

# Preuve (5/5) : conclusion

## Preuve (5/5) : conclusion

Nous voulons montrer que :

- $L_1^+$  et  $R_1^+$  coïncident en  $2l - 1$  spécialisations,
- $L_1^-$  et  $R_1^-$  coïncident en  $2l$  spécialisations,
- $L_2^+$  et  $R_2^+$  coïncident en  $2l$  spécialisations,
- $L_2^-$  et  $R_2^-$  coïncident en  $2l + 1$  spécialisations.

# Preuve (5/5) : conclusion

## Preuve (5/5) : conclusion

$L_1^+$  et  $R_1^+$  coïncident en  $x = \bar{a}x_1$  :

## Preuve (5/5) : conclusion

$L_1^+$  et  $R_1^+$  coïncident en  $x = \bar{a}x_1$  :

$$Z_{QT}^+(4l; X_{2l-1}, (\bar{a}x_1, \mathbf{y})) = \\ \sigma(a)^2 \sigma(ax_i \bar{y}) \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k)^2 Z_{QT}^+(4l-2; X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1))$$

## Preuve (5/5) : conclusion

$L_1^+$  et  $R_1^+$  coïncident en  $x = \bar{a}x_1$  :

$$\begin{aligned} & Z_{QT}^+(4l; X_{2l-1}, (\bar{a}x_1, \mathbf{y})) = \\ & \sigma(a)^2 \sigma(ax_i \bar{y}) \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k)^2 Z_{QT}^+(4l-2; X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \\ & = \sigma(a)^{-1} \sigma(a)^2 \sigma(ax_i \bar{y}) \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k)^2 \\ & \times Z(l-1; X_{2l-1} \setminus x_1) Z(l; X_{2l-1} \setminus x_1, \mathbf{y}, x_1) Z_{HT}^+(2l-1; X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \end{aligned}$$

## Preuve (5/5) : conclusion

$L_1^+$  et  $R_1^+$  coïncident en  $x = \bar{a}x_1$  :

$$\begin{aligned} & Z_{QT}^+(4l; X_{2l-1}, (\bar{a}x_1, \mathbf{y})) = \\ & \sigma(a)^2 \sigma(ax_i \bar{y}) \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k)^2 Z_{QT}^+(4l-2; X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \\ & = \sigma(a)^{-1} \sigma(a)^2 \sigma(ax_i \bar{y}) \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k)^2 \\ & \times Z(l-1; X_{2l-1} \setminus x_1) Z(l; X_{2l-1} \setminus x_1, \mathbf{y}, x_1) Z_{HT}^+(2l-1; X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \\ & = \sigma(a)^{-1} \sigma(a)^2 \sigma(ax_i \bar{y}) \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k)^2 \\ & \times Z(l-1; X_{2l-1} \setminus x_1) Z(l; X_{2l-1}, \mathbf{y}) Z_{HT}^+(2l-1; X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \end{aligned}$$

## Preuve (5/5) : conclusion

$L_1^+$  et  $R_1^+$  coïncident en  $x = \bar{a}x_1$  :

$$\begin{aligned} & Z_{QT}^+(4l; X_{2l-1}, (\bar{a}x_1, \mathbf{y})) = \\ & \sigma(a)^2 \sigma(ax_i \bar{y}) \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k)^2 Z_{QT}^+(4l-2; X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \\ & = \sigma(a)^{-1} \sigma(a)^2 \sigma(ax_i \bar{y}) \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k)^2 \\ & \times Z(l-1; X_{2l-1} \setminus x_1) Z(l; X_{2l-1} \setminus x_1, \mathbf{y}, x_1) Z_{HT}^+(2l-1; X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \\ & = \sigma(a)^{-1} \sigma(a)^2 \sigma(ax_i \bar{y}) \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k)^2 \\ & \times Z(l-1; X_{2l-1} \setminus x_1) Z(l; X_{2l-1}, \mathbf{y}) Z_{HT}^+(2l-1; X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \\ & = \sigma(a)^{-1} Z(l; X_{2l-1}, \bar{a}x_1) Z(l; X_{2l-1}, \mathbf{y}) Z_{HT}^+(2l; X_{2l-1}, (\bar{a}x_1, \mathbf{y})). \end{aligned}$$

## Preuve (5/5) : conclusion

$L_1^+$  et  $R_1^+$  coïncident en  $x = \bar{a}x_1$ .

## Preuve (5/5) : conclusion

$L_1^+$  et  $R_1^+$  coïncident en  $x = \bar{a}x_1$ .

De même :

$L_1^-$  et  $R_1^-$  coïncident en  $x = \bar{a}x_1$ .

$L_1^+$  et  $R_1^+$  coïncident en  $y = ax_1$ .

$L_1^-$  et  $R_1^-$  coïncident en  $y = ax_1$ .

On déduit :

$L_1^+$  et  $R_1^+$  coïncident en  $x = ax_1$ .

$L_1^-$  et  $R_1^-$  coïncident en  $x = ax_1$ .

# Pseudo-symétrie

# Pseudo-symétrie

On a :

$$L_1^+(\mathbf{y}, ax_1) = R_1^+(\mathbf{y}, ax_1) \quad \text{and} \quad L_1^-(\mathbf{y}, ax_1) = R_1^-(\mathbf{y}, ax_1),$$

d'où :

$$\begin{aligned} L_1^+(ax_1, \mathbf{y}) &= \frac{\sigma(a^2)L_1^+(\mathbf{y}, ax_1) + \sigma(ax_1\bar{y})L_1^-(\mathbf{y}, ax_1)}{\sigma(a\mathbf{y}\bar{x}_1)} \\ &= \frac{\sigma(a^2)R_1^+(\mathbf{y}, ax_1) + \sigma(ax_1\bar{y})R_1^-(\mathbf{y}, ax_1)}{\sigma(a\mathbf{y}\bar{x}_1)} \\ &= R_1^+(ax_1, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

## Preuve (5/5) : conclusion

$L_1^+$  et  $R_1^+$  coïncident en  $x = \bar{a}x_1$ .

De même :

$L_1^-$  et  $R_1^-$  coïncident en  $x = \bar{a}x_1$ .

$L_1^+$  et  $R_1^+$  coïncident en  $y = ax_1$ .

$L_1^-$  et  $R_1^-$  coïncident en  $y = ax_1$ .

On déduit :

$L_1^+$  et  $R_1^+$  coïncident en  $x = ax_1$ .

$L_1^-$  et  $R_1^-$  coïncident en  $x = ax_1$ .

## Preuve (5/5) : conclusion

$L_1^+$  et  $R_1^+$  coïncident en  $x = \bar{a}x_1$ .

De même :

$L_1^-$  et  $R_1^-$  coïncident en  $x = \bar{a}x_1$ .

$L_1^+$  et  $R_1^+$  coïncident en  $y = ax_1$ .

$L_1^-$  et  $R_1^-$  coïncident en  $y = ax_1$ .

On déduit :

$L_1^+$  et  $R_1^+$  coïncident en  $x = ax_1$ .

$L_1^-$  et  $R_1^-$  coïncident en  $x = ax_1$ .

D'où les égalités :  $L_1^+ = R_1^+$  et  $L_1^- = R_1^-$ .

# Preuve (5/5) : conclusion

## Preuve (5/5) : conclusion

$L_2^+$  et  $R_2^+$  coïncident en  $x = \bar{a}x_1$ .

$L_2^-$  et  $R_2^-$  coïncident en  $x = \bar{a}x_1$ .

$L_2^+$  et  $R_2^+$  coïncident en  $y = ax_1$ .

$L_2^-$  et  $R_2^-$  coïncident en  $y = ax_1$ .

On déduit (symétrie  $(x, y)$ ) :

$L_2^+$  et  $R_2^+$  coïncident en  $x = ax_1$ .

$L_2^-$  et  $R_2^-$  coïncident en  $x = ax_1$ .

## Preuve (5/5) : conclusion

$L_2^+$  et  $R_2^+$  coïncident en  $x = \bar{a}x_1$ .

$L_2^-$  et  $R_2^-$  coïncident en  $x = \bar{a}x_1$ .

$L_2^+$  et  $R_2^+$  coïncident en  $y = ax_1$ .

$L_2^-$  et  $R_2^-$  coïncident en  $y = ax_1$ .

On déduit (symétrie  $(x, y)$ ) :

$L_2^+$  et  $R_2^+$  coïncident en  $x = ax_1$ .

$L_2^-$  et  $R_2^-$  coïncident en  $x = ax_1$ .

D'où  $L_2^+ = R_2^+$ .

Mais il manque **une** spécialisation pour  $L_2^- = R_2^-$ .

# Spécialisation supplémentaire

# Spécialisation supplémentaire

On a :

$$\left(L_2^+ + L_2^-\right) = \left(R_2^+ + R_2^-\right) \text{ pour } x = ay.$$

# Spécialisation supplémentaire

On a :

$$\left( L_2^+ + L_2^- \right) = \left( R_2^+ + R_2^- \right) \text{ pour } x = ay.$$

Mais on vient de prouver :  $L_2^+ = R_2^+$ .

# Spécialisation supplémentaire

On a :

$$\left( L_2^+ + L_2^- \right) = \left( R_2^+ + R_2^- \right) \text{ pour } x = ay.$$

Mais on vient de prouver :  $L_2^+ = R_2^+$ .

D'où  $L_2^- = R_2^-$  pour  $x = ay$ .

# Spécialisation supplémentaire

On a :

$$\left( L_2^+ + L_2^- \right) = \left( R_2^+ + R_2^- \right) \text{ pour } x = ay.$$

Mais on vient de prouver :  $L_2^+ = R_2^+$ .

D'où  $L_2^- = R_2^-$  pour  $x = ay$ .

Fin de la preuve.