

Énumération de (classes de symétrie de) matrices à signes alternants (selon Kuperberg)

Jean-Christophe Aval, Philippe Duchon

LaBRI – 21-03-08

Matrices à signes alternants

Matrices à signes alternants

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & - & + & - & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & - & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Matrices à signes alternants

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & - & + & - & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & - & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Théorème (Zeilberger)

Le nombre de MSA de taille n est donné par la formule :

$$A(n) = \frac{1! 4! 7! \dots (3n-2)!}{n! (n+1)! (n+2)! \dots (2n-1)!}.$$

Classes de symétrie de MSA

Classes de symétrie de MSA

VSASM

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & - & + & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & - & + & - & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & + & - & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & - & + & - & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & - & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Classes de symétrie de MSA

VSASM

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & - & + & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & - & + & - & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & + & - & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & - & + & - & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & - & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

HTSASM

$$\begin{pmatrix} \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & - & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & - & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \end{pmatrix}$$

Classes de symétrie de MSA

VSASM

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & - & + & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & - & + & - & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & + & - & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & - & + & - & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & - & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

HTSASM

$$\begin{pmatrix} \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & - & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & - & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \end{pmatrix}$$

QTSASM

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & - & + \\ + & - & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Classes de symétrie de MSA

Classes de symétrie de MSA

Théorème (Kuperberg)

Le nombres de MSA respectivement non-, V-, HT-, et QT-symétriques sont donnés par :

$$A(n) = (-3)^{\binom{n}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} \frac{3(j-i) + 1}{j-i+n},$$

$$A_V(2n+1) = (-3)^{n^2} \prod_{1 \leq i, j \leq 2n+1, 2|j} \frac{3(j-i) + 1}{j-i+2n+1},$$

$$A_{HT}(2n) = A(n) \times (-3)^{\binom{n}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} \frac{3(j-i) + 2}{j-i+n},$$

$$A_{QT}(4n) = A(n)^2 \times A_{HT}(2n).$$

Glace carrée

Glace carrée

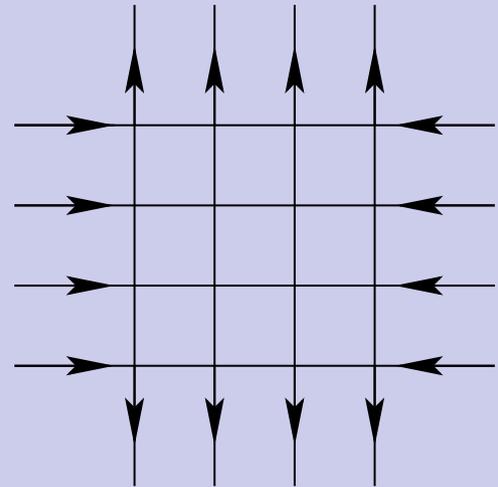
Terminologie :

- G graphe tétravalent, un **état glacé** de G est une orientation des arêtes telle qu'en chaque sommet 2 arêtes rentrent et 2 sortent
- si G est localement carré, on parle de **glace carrée**
- G peut avoir des sommets de degré 1 : **bord**
- une restriction sur les arêtes au bord est appelée **condition au bord**

Glace carrée

Terminologie :

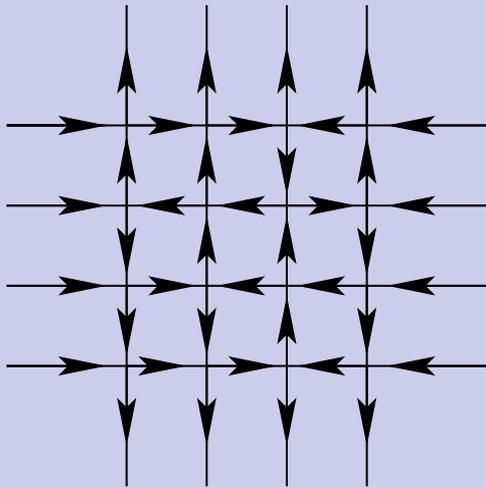
- G graphe tétravalent, un **état glacé** de G est une orientation des arêtes telle qu'en chaque sommet 2 arêtes rentrent et 2 sortent
- si G est localement carré, on parle de **glace carrée**
- G peut avoir des sommets de degré 1 : **bord**
- une restriction sur les arêtes au bord est appelée **condition au bord**



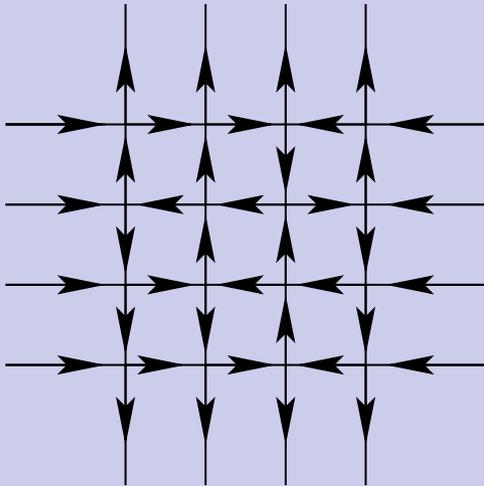
Glace carrée avec **domain wall boundary** :

Glace carrée et MSA

Glace carrée et MSA

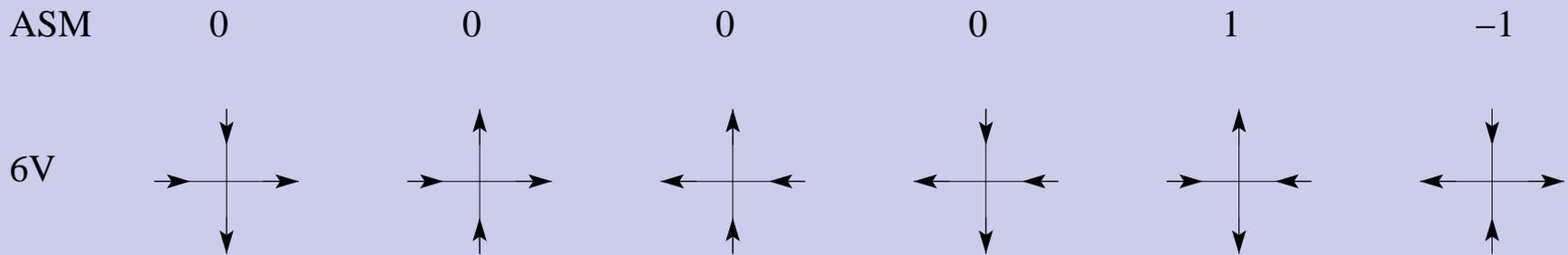
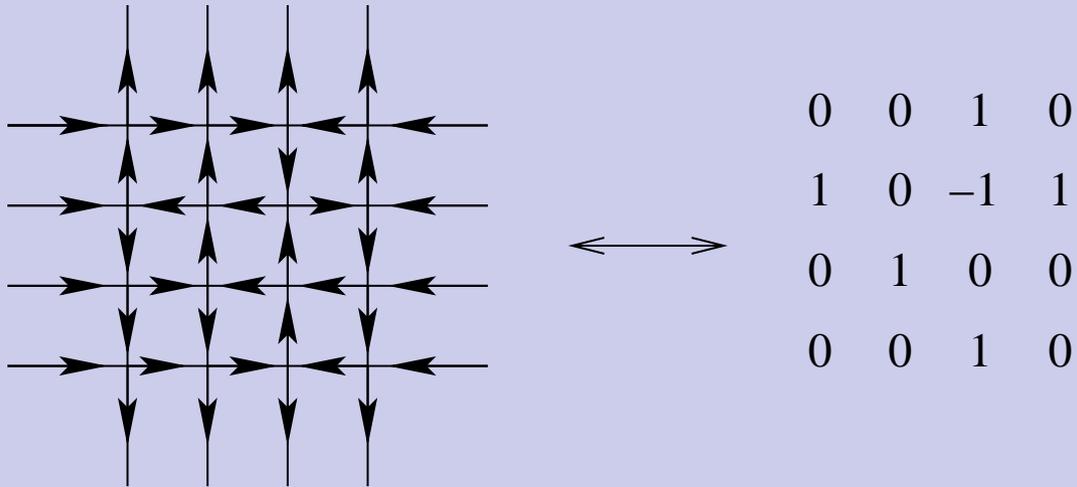


Glace carrée et MSA



0	0	1	0
1	0	-1	1
0	1	0	0
0	0	1	0

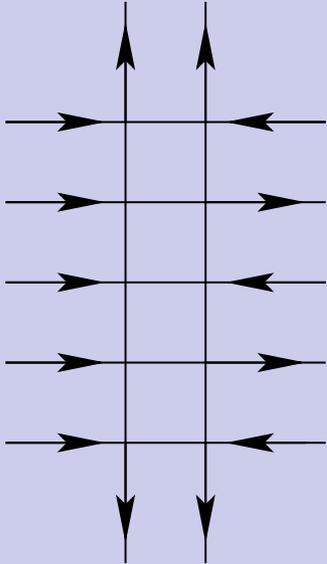
Glace carrée et MSA



Glace carrée et symétrie

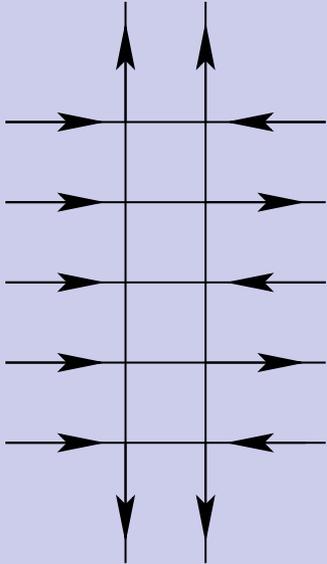
Glace carrée et symétrie

Glace carrée VS

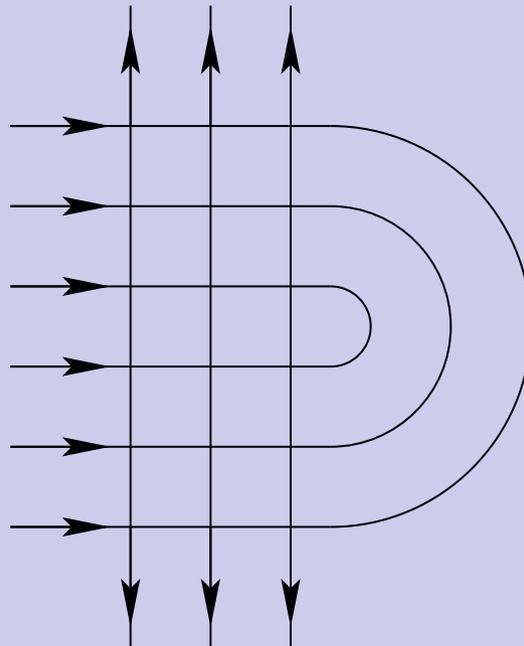


Glace carrée et symétrie

Glace carrée VS

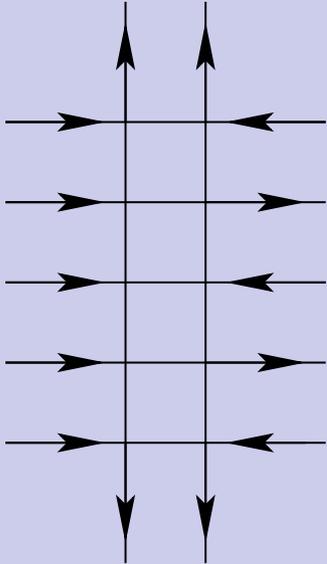


Glace carrée HTS

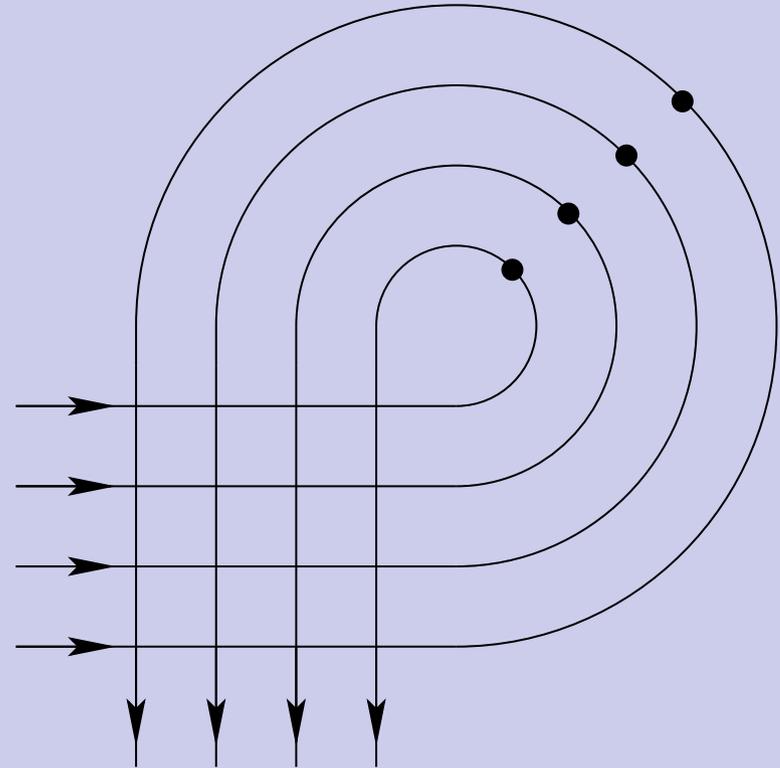


Glace carrée et symétrie

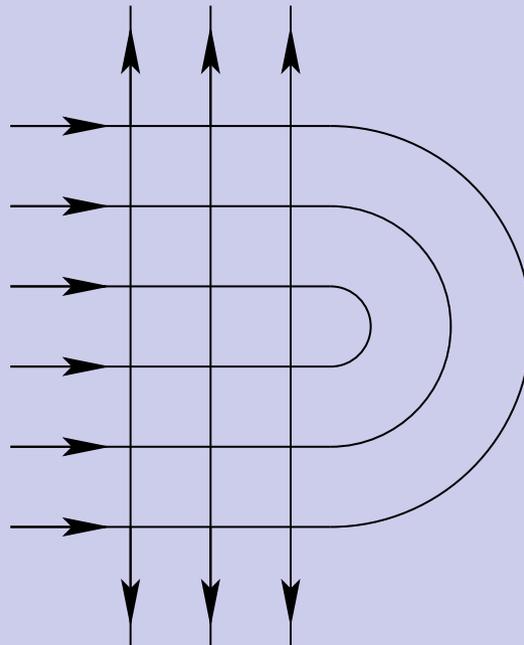
Glace carrée VS



Glace carrée QTS

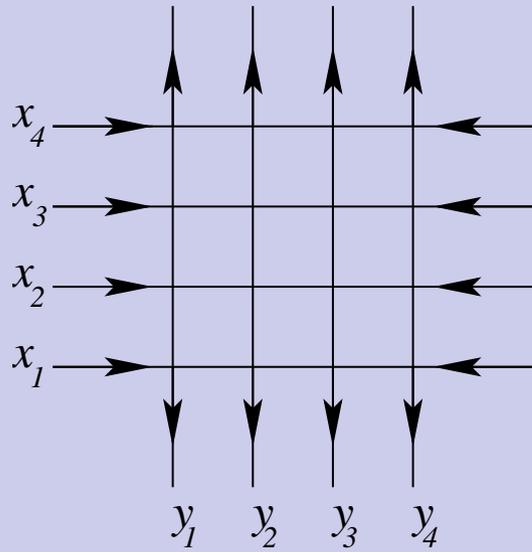


Glace carrée HTS



Poids

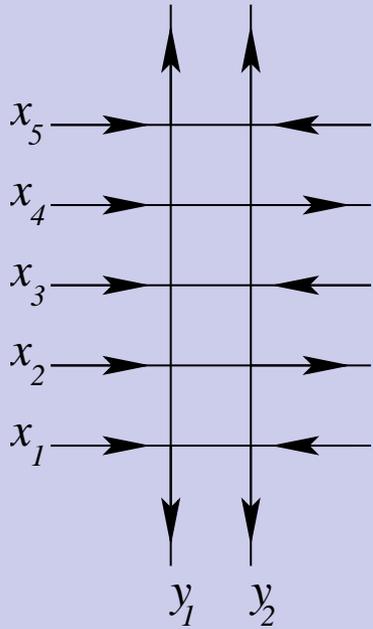
Poids



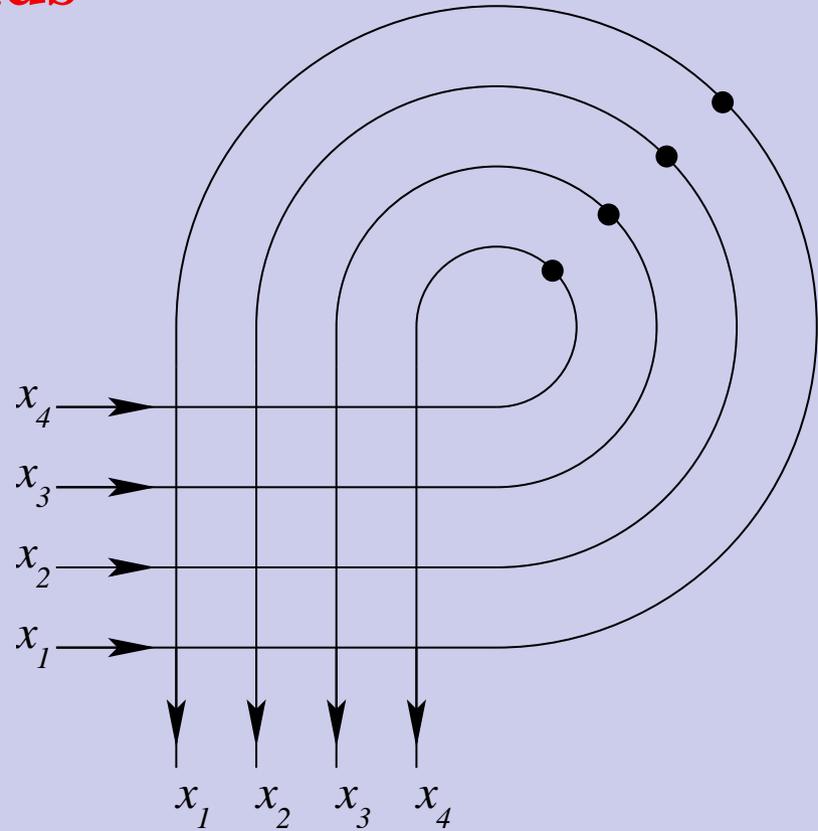
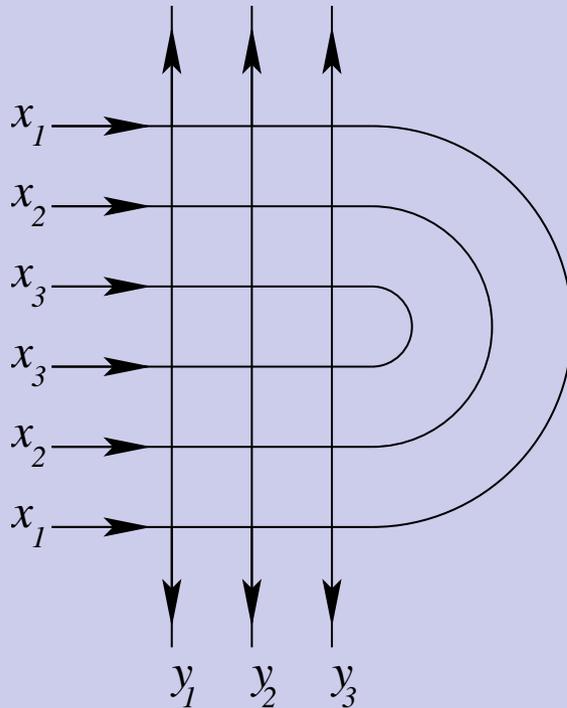
Poids

Glace carrée QTS

Glace carrée VS



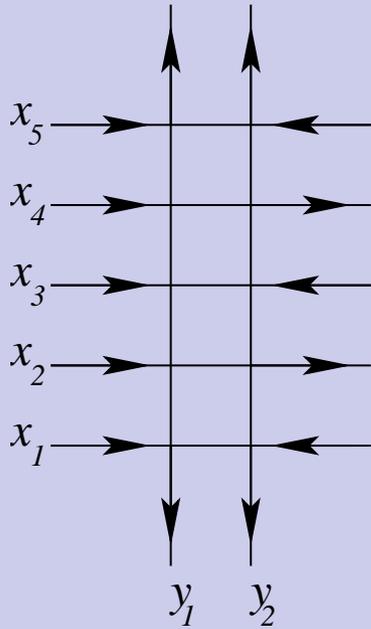
Glace carrée HTS



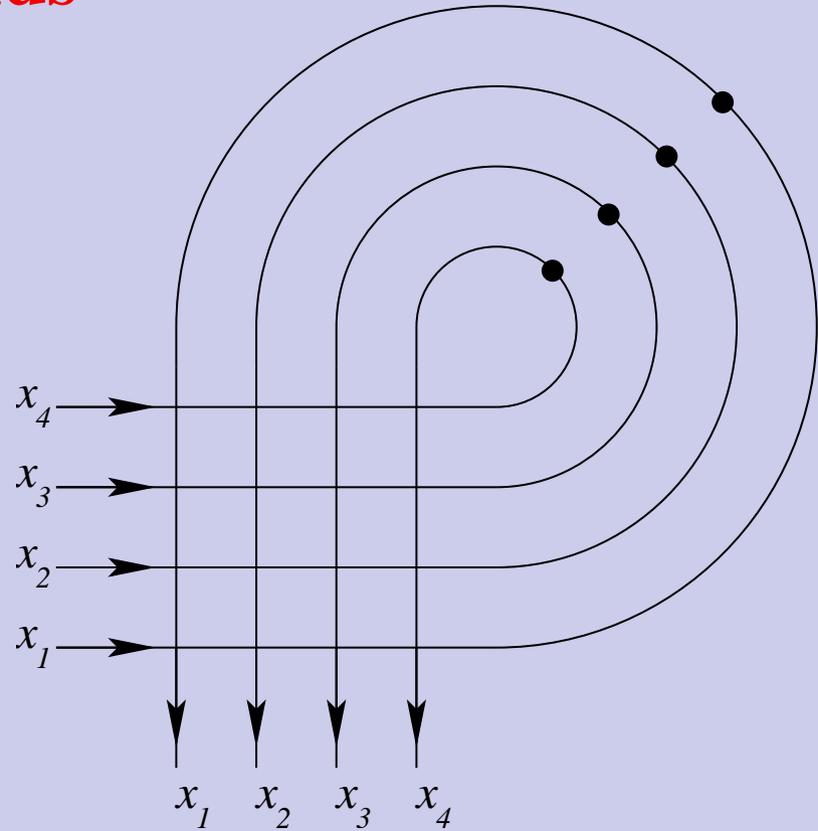
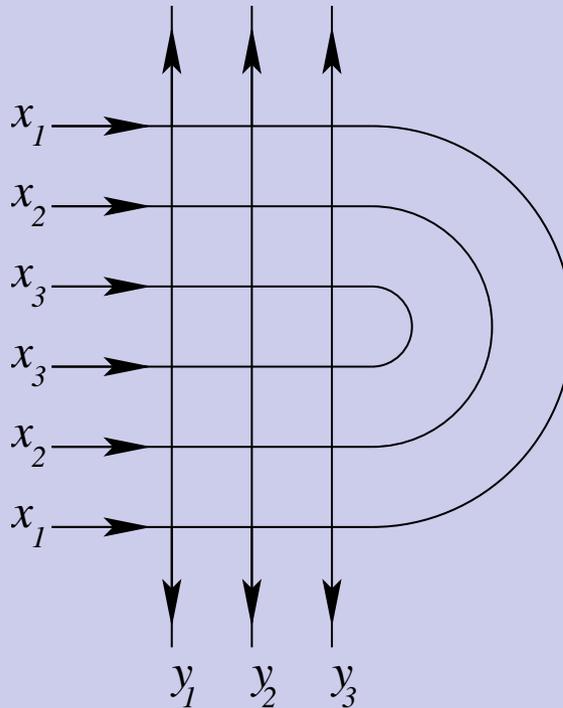
Poids

Glace carrée QTS

Glace carrée VS

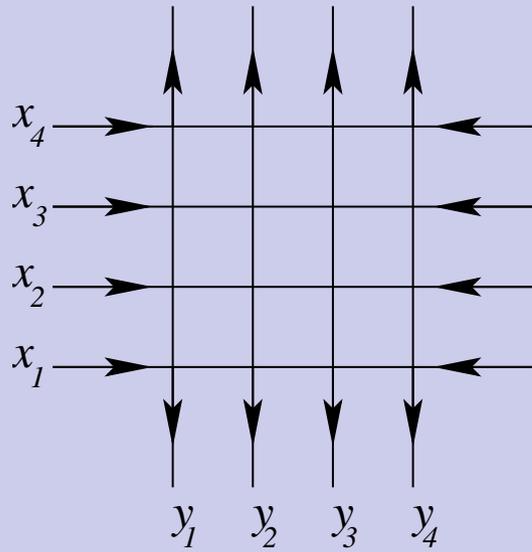


Glace carrée HTS

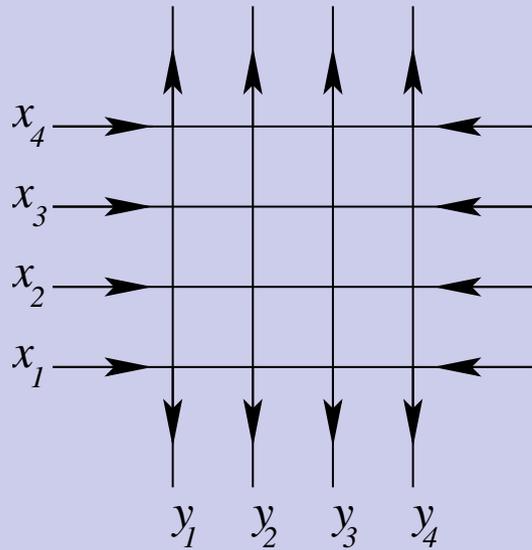


paramètres spectraux

Poids



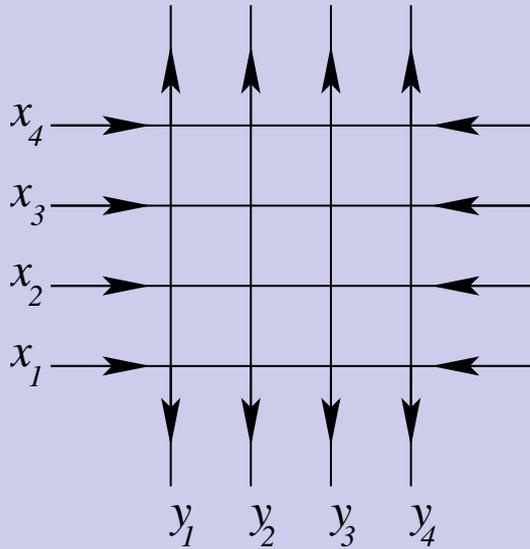
Poids



$$\bar{z} = z^{-1}$$

$$\sigma(z) = z - \bar{z}$$

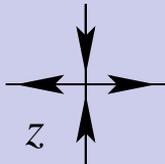
Poids



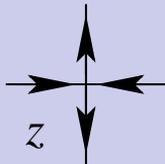
$$\bar{z} = z^{-1}$$

$$\sigma(z) = z - \bar{z}$$

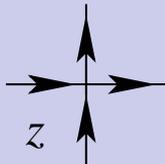
poids en chaque nœud :



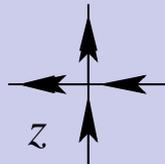
$$\sigma(a^2)$$



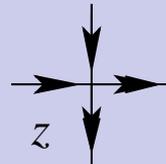
$$\sigma(a^2)$$



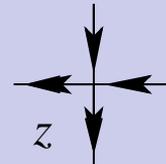
$$\sigma(a\bar{z})$$



$$\sigma(az)$$

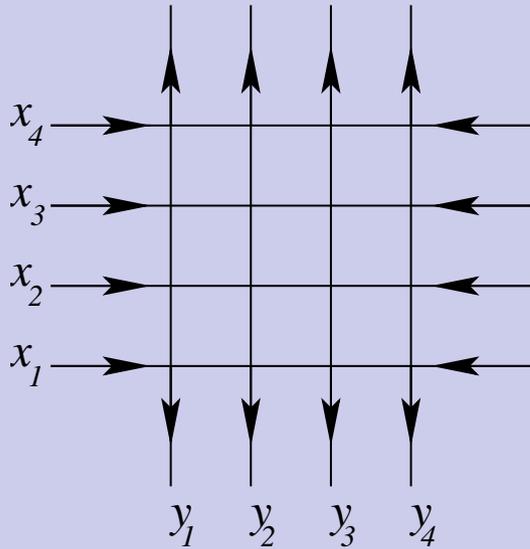


$$\sigma(az)$$



$$\sigma(a\bar{z})$$

Poids



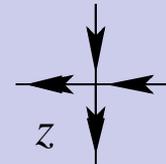
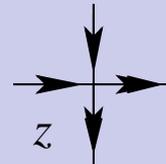
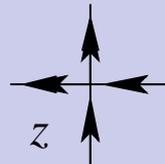
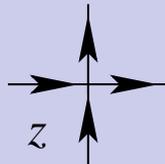
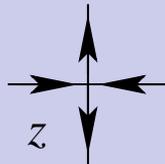
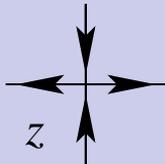
avec :

- a un paramètre commun à tous les sommets
- $z = x_i \bar{y}_j$

$$\bar{z} = z^{-1}$$

$$\sigma(z) = z - \bar{z}$$

poids en chaque nœud :



$$\sigma(a^2)$$

$$\sigma(a^2)$$

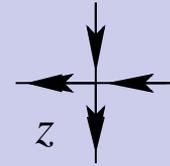
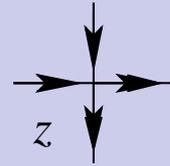
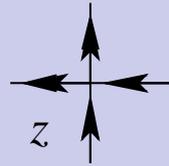
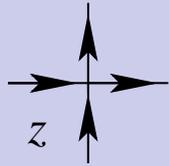
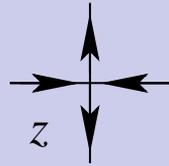
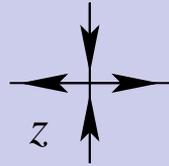
$$\sigma(a\bar{z})$$

$$\sigma(az)$$

$$\sigma(az)$$

$$\sigma(a\bar{z})$$

Poids



$$\sigma(a^2)$$

$$\sigma(a^2)$$

$$\sigma(a\bar{z})$$

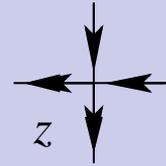
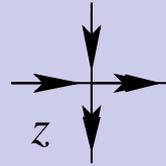
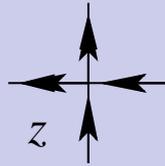
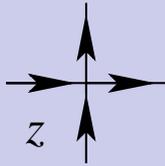
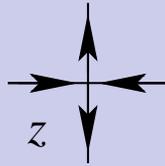
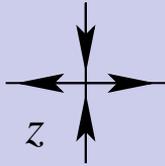
$$\sigma(az)$$

$$\sigma(az)$$

$$\sigma(a\bar{z})$$

Le poids d'un état est alors le produit des poids des sommets

Poids



$$\sigma(a^2)$$

$$\sigma(a^2)$$

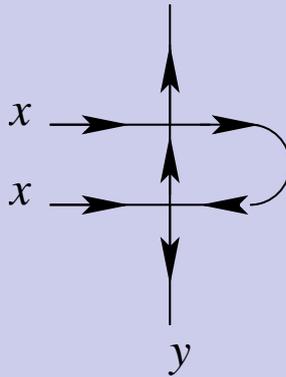
$$\sigma(a\bar{z})$$

$$\sigma(az)$$

$$\sigma(az)$$

$$\sigma(a\bar{z})$$

Le poids d'un état est alors le produit des poids des sommets

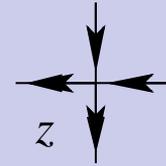
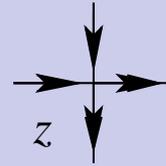
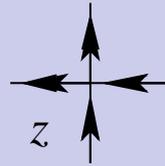
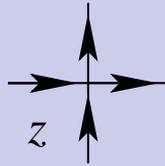
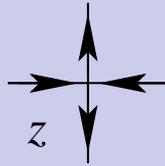
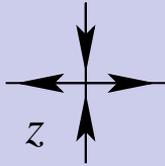


Par exemple, le poids de

y

est $\sigma(a\bar{x}y) \times \sigma(a^2)$.

Poids



$$\sigma(a^2)$$

$$\sigma(a^2)$$

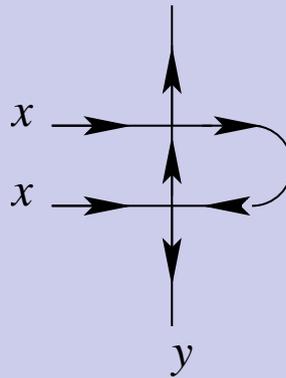
$$\sigma(a\bar{z})$$

$$\sigma(az)$$

$$\sigma(az)$$

$$\sigma(a\bar{z})$$

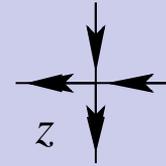
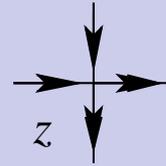
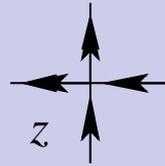
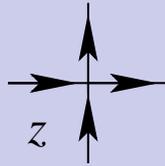
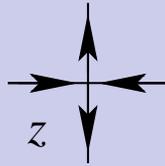
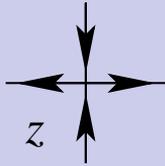
Le poids d'un état est alors le produit des poids des sommets



Par exemple, le poids de y est $\sigma(a\bar{x}y) \times \sigma(a^2)$.

La **fonction de partition** d'un modèle de glace est la somme des poids de tous ses états.

Poids



$$\sigma(a^2)$$

$$\sigma(a^2)$$

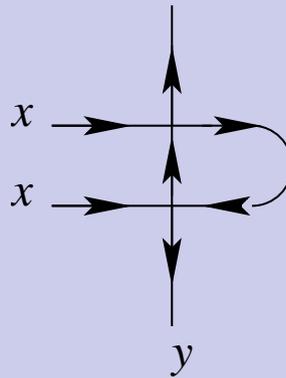
$$\sigma(a\bar{z})$$

$$\sigma(az)$$

$$\sigma(az)$$

$$\sigma(a\bar{z})$$

Le poids d'un état est alors le produit des poids des sommets



Par exemple, le poids de y est $\sigma(a\bar{x}y) \times \sigma(a^2)$.

La **fonction de partition** d'un modèle de glace est la somme des poids de tous ses états.

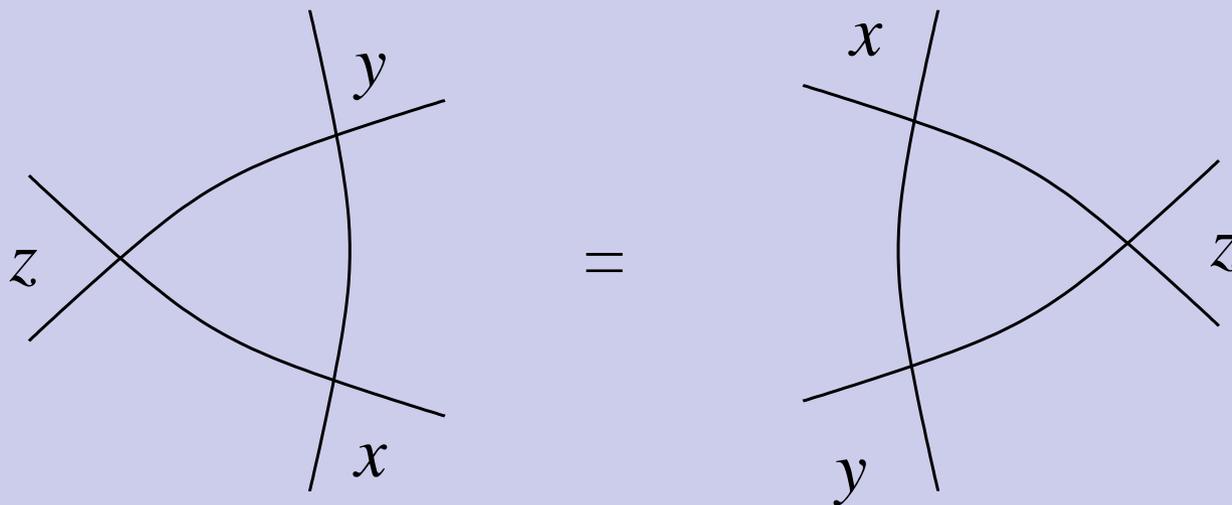
Notation :

$$Z(l; X_l, Y_l), Z_V(2l + 1; X_{2l+1}, Y_l), Z_{HT}(2l; X_l, Y_l), Z_{QT}(4l; X_{2l})$$

Équation de Yang-Baxter

Équation de Yang-Baxter

Si $xyz = \bar{a}$ alors :



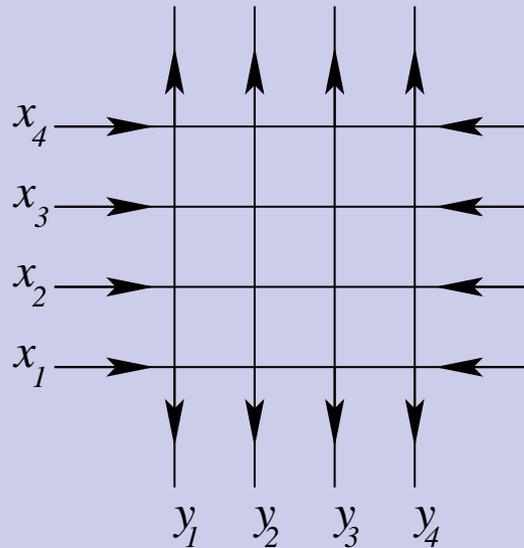
Symétrie des fonctions de partition

Symétrie des fonctions de partition

Application de l'équation de Yang-Baxter

Symétrie des fonctions de partition

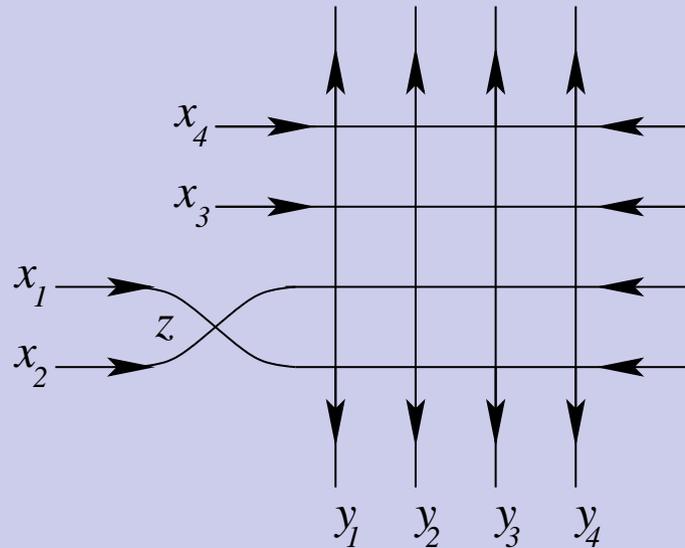
Application de l'équation de Yang-Baxter



$$Z(4; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

Symétrie des fonctions de partition

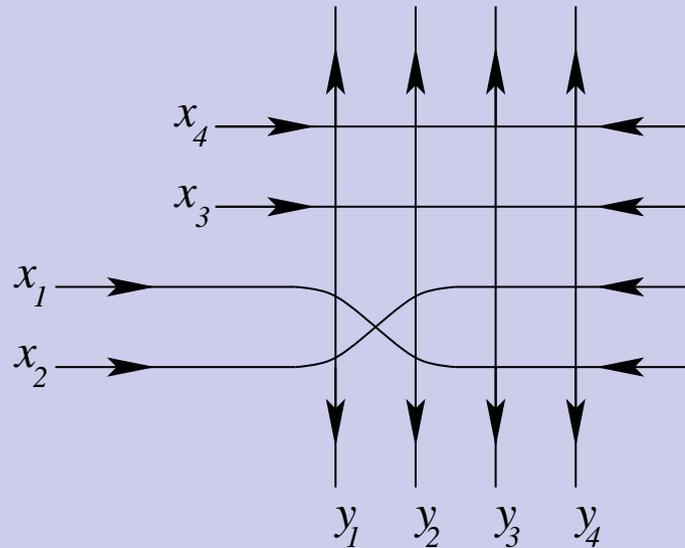
Application de l'équation de Yang-Baxter



$$\sigma(a\bar{z}) \times Z(4; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

Symétrie des fonctions de partition

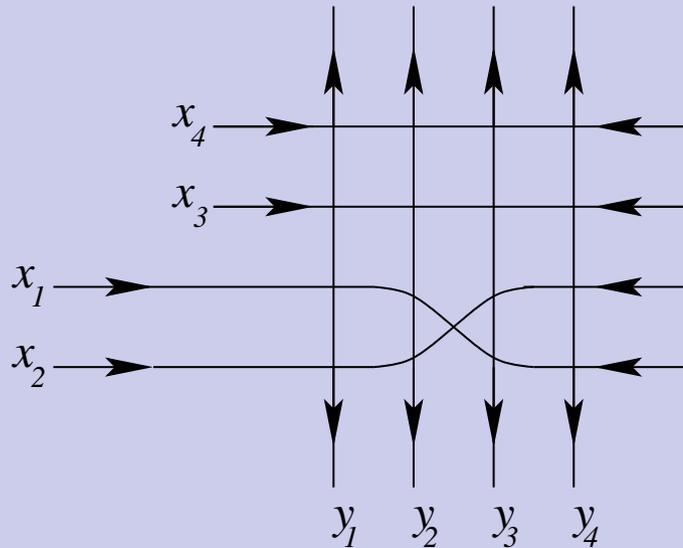
Application de l'équation de Yang-Baxter



$$\sigma(a\bar{z}) \times Z(4; x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

Symétrie des fonctions de partition

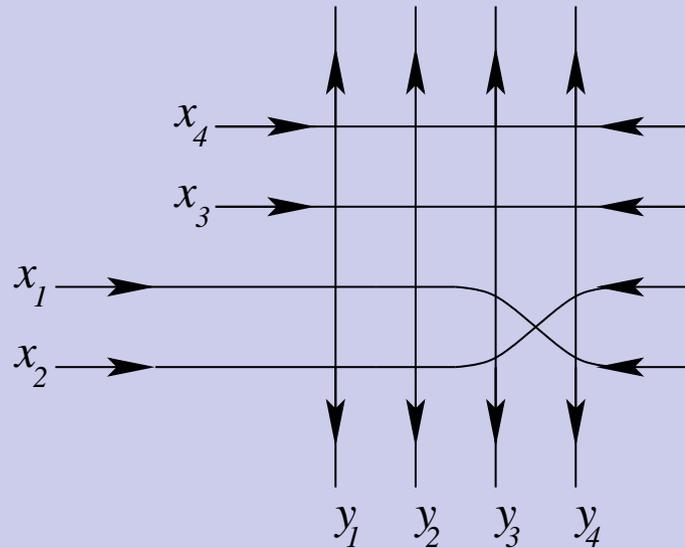
Application de l'équation de Yang-Baxter



$$\sigma(a\bar{z}) \times Z(4; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

Symétrie des fonctions de partition

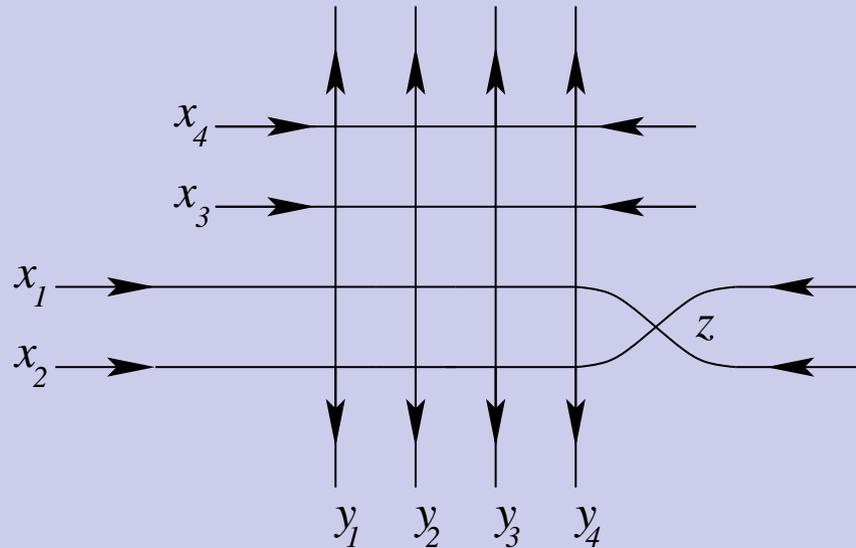
Application de l'équation de Yang-Baxter



$$\sigma(a\bar{z}) \times Z(4; x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

Symétrie des fonctions de partition

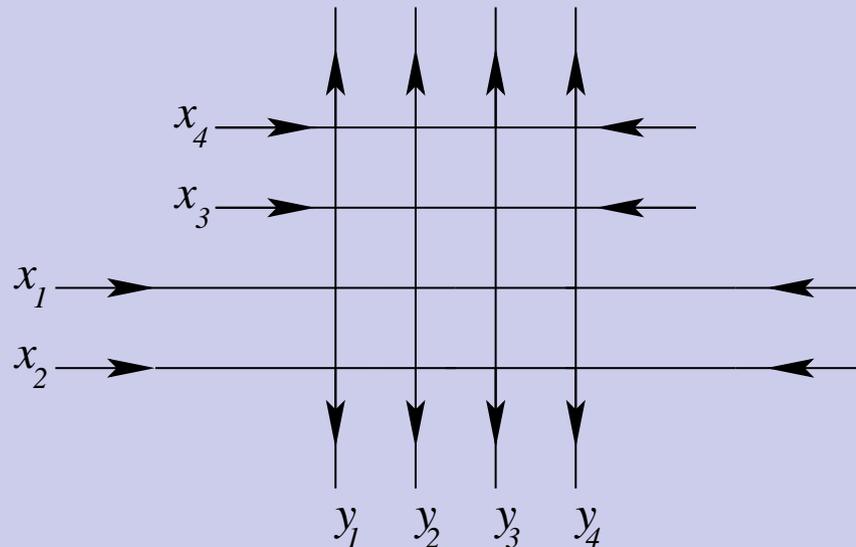
Application de l'équation de Yang-Baxter



$$\begin{aligned} & \sigma(a\bar{z}) \times Z(4; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ &= Z(4; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4) \times \sigma(a\bar{z}) \end{aligned}$$

Symétrie des fonctions de partition

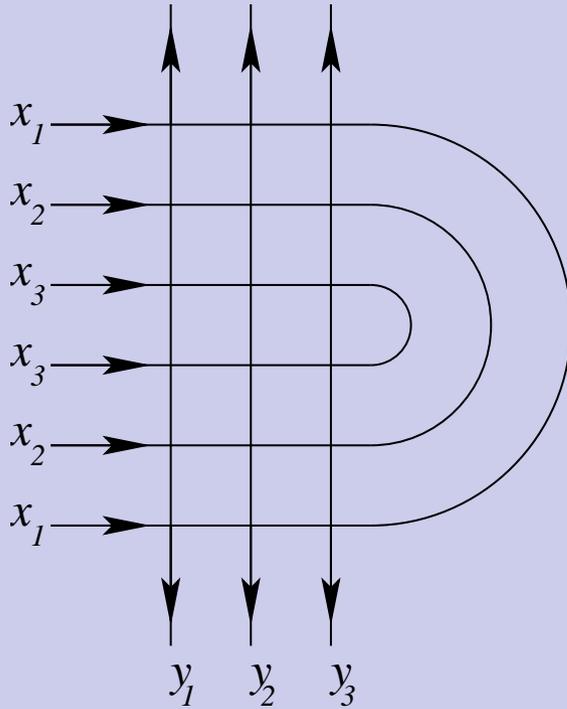
Application de l'équation de Yang-Baxter



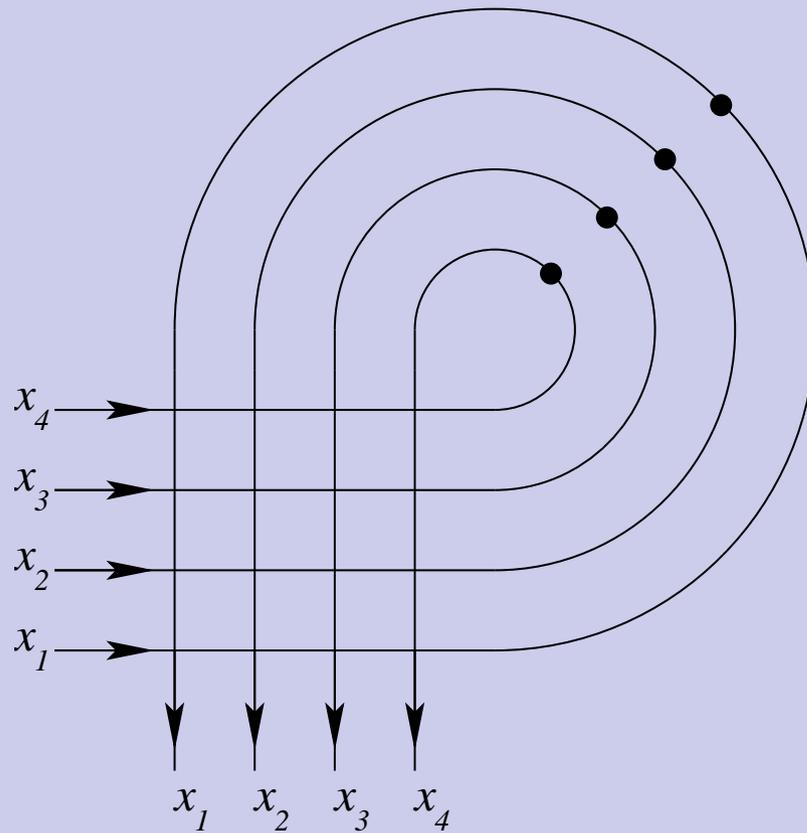
$$Z(4; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4) = Z(4; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

Symétrie des fonctions de partition

Glace carrée HTS



Glace carrée QTS



Polynômes de Laurent et largeurs

Polynômes de Laurent et largeurs

Chacune des fonctions de partition considérées est

- un polynôme de Laurent en x_1
- centré
- pair ou impair

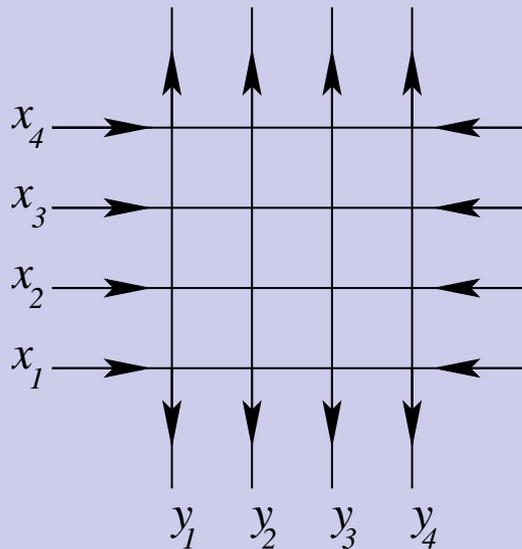
Donc sa valeur est déterminée par $w + 1$ spécialisations où w est sa demi-largeur (sa largeur en x_1^2).

Polynômes de Laurent et largeurs

Chacune des fonctions de partition considérées est

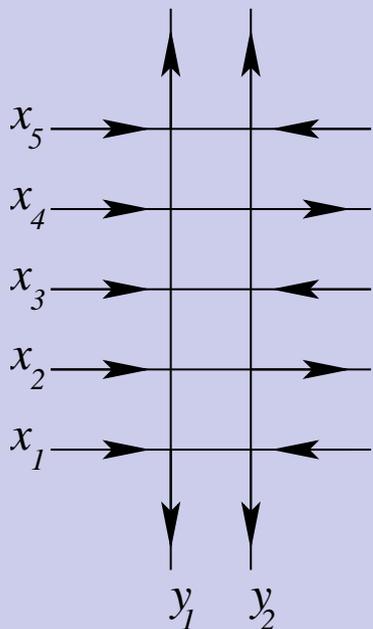
- un polynôme de Laurent en x_1
- centré
- pair ou impair

Donc sa valeur est déterminée par $w + 1$ spécialisations où w est sa demi-largeur (sa largeur en x_1^2).

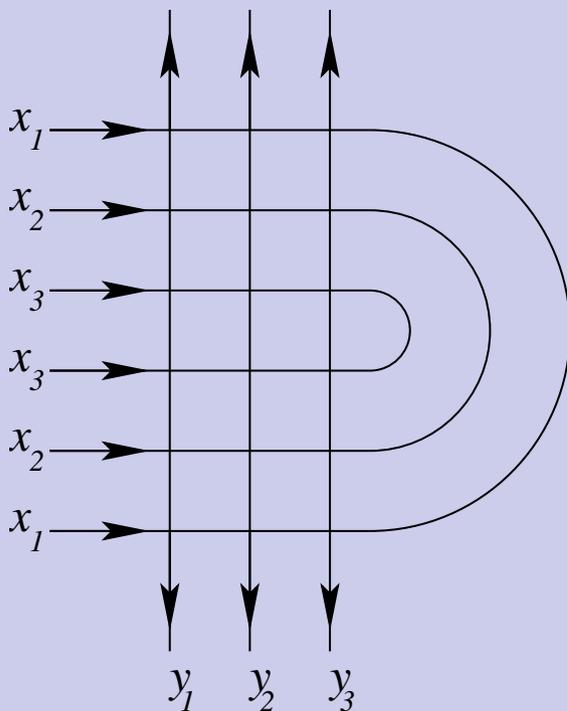


Polynômes de Laurent et largeurs

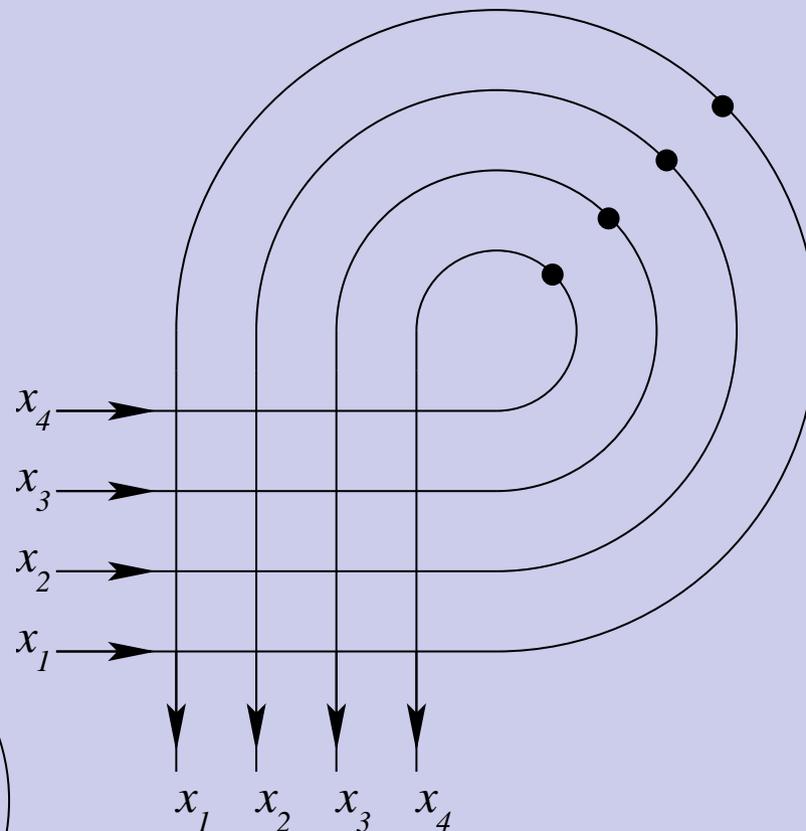
Glace carrée VS



Glace carrée HTS



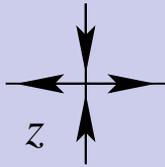
Glace carrée QTS



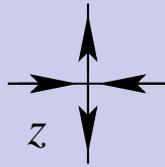
Spécialisations

Spécialisations

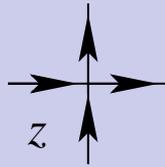
Rappel :



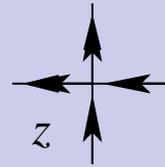
$$\sigma(a^2)$$



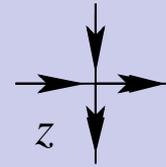
$$\sigma(a^2)$$



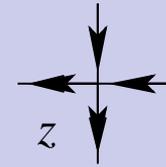
$$\sigma(a\bar{z})$$



$$\sigma(az)$$



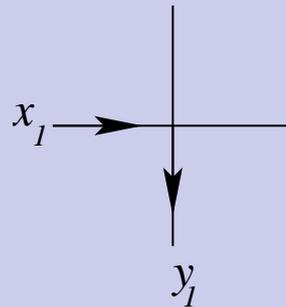
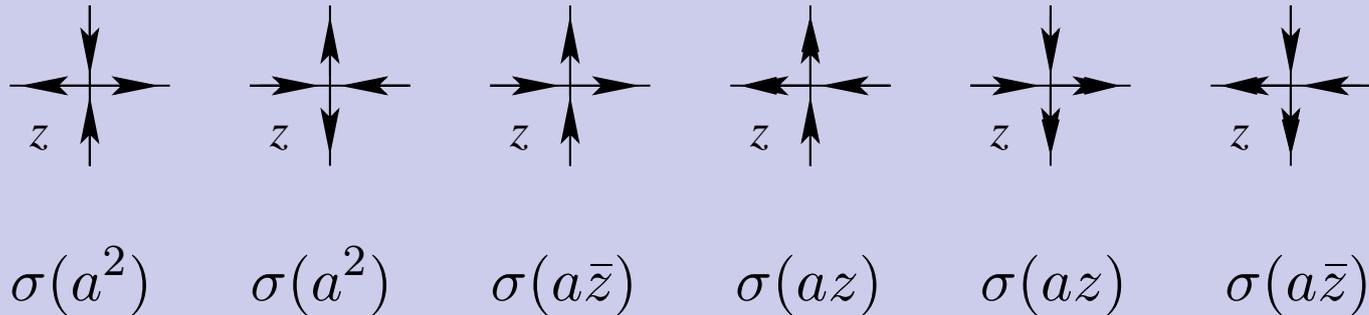
$$\sigma(az)$$



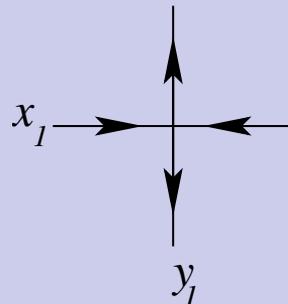
$$\sigma(a\bar{z})$$

Spécialisations

Rappel :

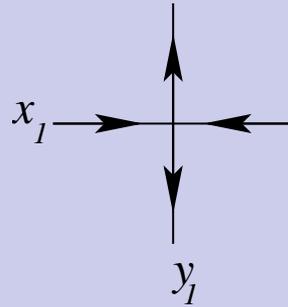


Donc pour $x_1 = \bar{a}y_1$ le sommet
seulement pour :

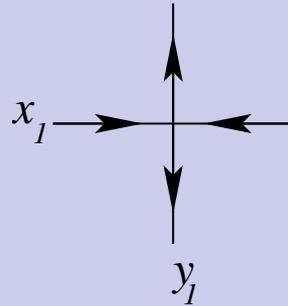


a un poids non nul

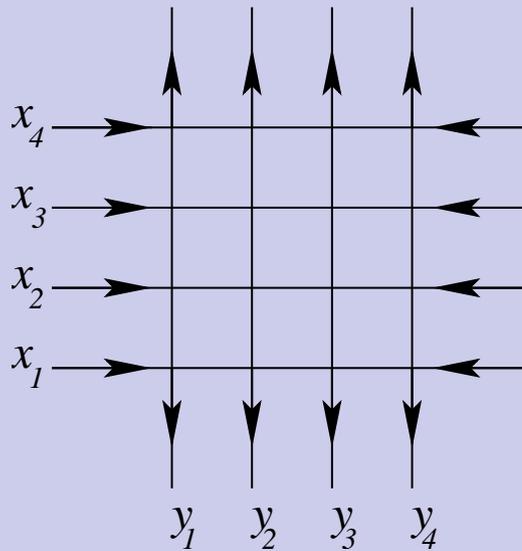
Spécialisations



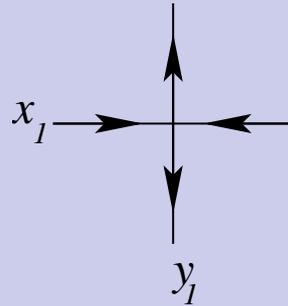
Spécialisations



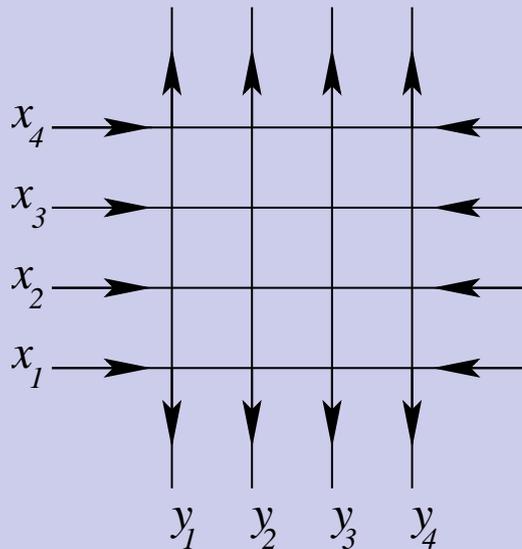
ce qui implique :



Spécialisations



ce qui implique :



d'où :

$$Z(l; \bar{a}y_1, x_2, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l) = \sigma(a^2) \prod_{2 \leq i} \sigma(a\bar{x}_1 y_i) \sigma(a\bar{x}_i y_1) \\ \times Z(l-1; x_2, \dots, x_l, y_2, \dots, y_l).$$

Spécialisations

$$Z(l; \bar{a}y_1, x_2, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l) = \sigma(a^2) \prod_{2 \leq i} \sigma(a\bar{x}_1 y_i) \sigma(a\bar{x}_i y_1) \\ \times Z(l-1; x_2, \dots, x_l, y_2, \dots, y_l).$$

Spécialisations

$$Z(l; \bar{a}y_1, x_2, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l) = \sigma(a^2) \prod_{2 \leq i} \sigma(a\bar{x}_1 y_i) \sigma(a\bar{x}_i y_1) \\ \times Z(l-1; x_2, \dots, x_l, y_2, \dots, y_l).$$

la symétrie en les y_i implique alors :

$$Z(l; \bar{a}y_k, x_2, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l) = \sigma(a^2) \prod_{i \neq 1} \sigma(a\bar{x}_1 y_i) \prod_{j \neq k} \sigma(a\bar{x}_j y_k) \\ \times Z(l-1; X_l \setminus x_1, Y_l \setminus y_k).$$

Spécialisations

$$Z(l; \bar{a}y_1, x_2, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l) = \sigma(a^2) \prod_{2 \leq i} \sigma(a\bar{x}_1 y_i) \sigma(a\bar{x}_i y_1) \\ \times Z(l-1; x_2, \dots, x_l, y_2, \dots, y_l).$$

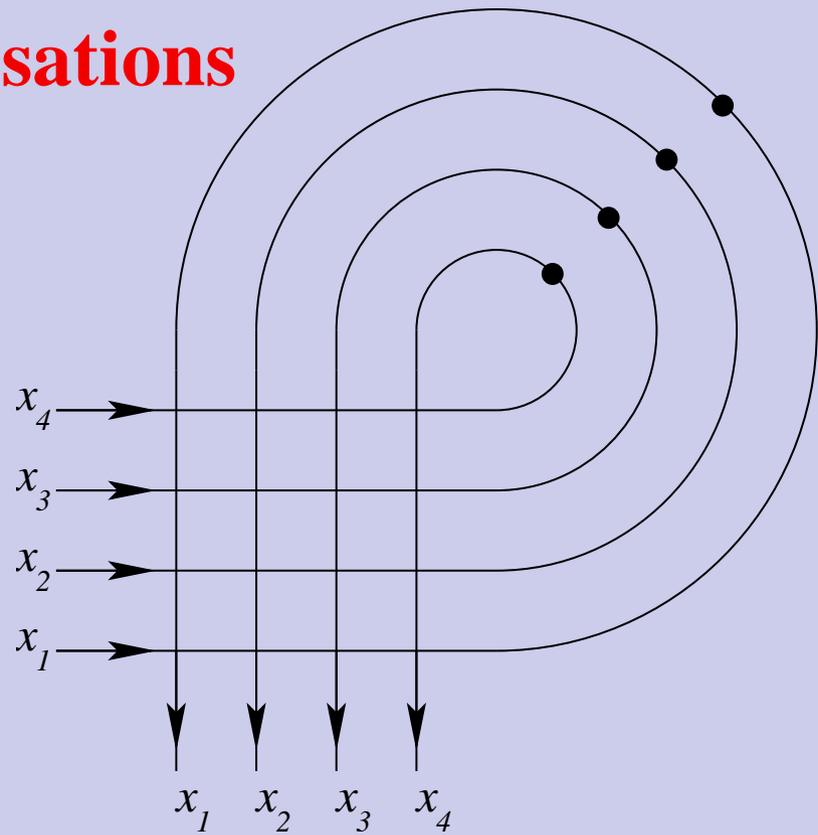
la symétrie en les y_i implique alors :

$$Z(l; \bar{a}y_k, x_2, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l) = \sigma(a^2) \prod_{i \neq 1} \sigma(a\bar{x}_1 y_i) \prod_{j \neq k} \sigma(a\bar{x}_j y_k) \\ \times Z(l-1; X_l \setminus x_1, Y_l \setminus y_k).$$

On obtient ainsi l spécialisations, ce qui est suffisant pour **déterminer** Z , de demi-largeur $l-1$.

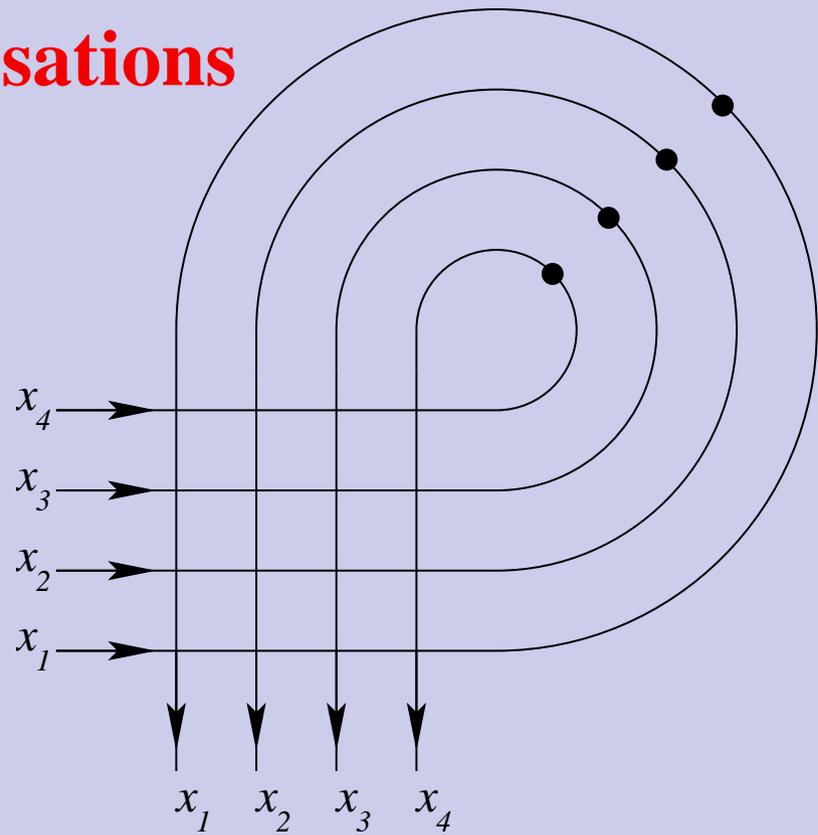
Spécialisations

Pour les QTSASM : $x_1 = ax_2$



Spécialisations

Pour les QTSASM : $x_1 = ax_2$

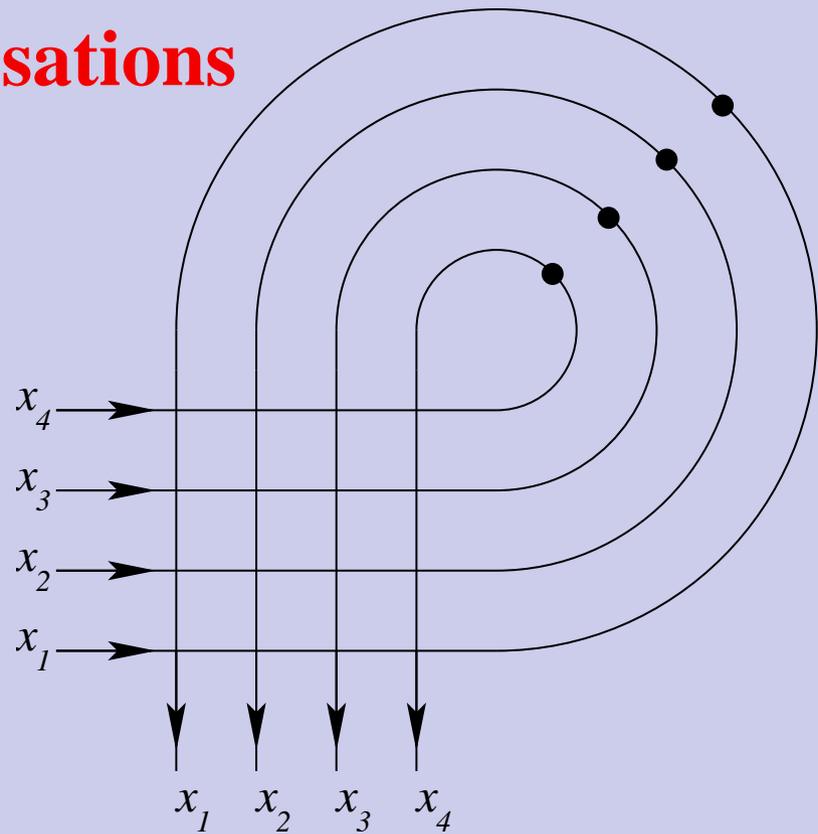


D'où :

$$Z_{QT}(l; ax_2, x_2, \dots, x_{2l}) = \sigma(a)^2 \sigma(a^2)^2 \prod_{3 \leq i \leq 2l} \sigma(ax_i \bar{x}_1)^2 \sigma(a \bar{x}_i x_2)^2 \\ \times Z_{QT}(4(l-1); x_3, \dots, x_{2l})$$

Spécialisations

Pour les QTSASM : $x_1 = ax_2$



D'où :

$$Z_{QT}(l; ax_2, x_2, \dots, x_{2l}) = \sigma(a)^2 \sigma(a^2)^2 \prod_{3 \leq i \leq 2l} \sigma(ax_i \bar{x}_1)^2 \sigma(a \bar{x}_i x_2)^2 \\ \times Z_{QT}(4(l-1); x_3, \dots, x_{2l})$$

On obtient par symétrie $2(2l-1)$ spécialisations, ce qui est suffisant pour **déterminer** Z_{QT} , de demi-largeur $4l-3$.