

Quarter-turn symmetric alternating sign matrices

Jean-Christophe Aval

Second congress Canada-France

Alternating sign matrices (ASM)

Alternating sign matrices (ASM)

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & - & + & - & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & - & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Alternating sign matrices (ASM)

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & - & + & - & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & - & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

size $l = 8$

ASM invariant under a half-turn (HTASM)

ASM invariant under a half-turn (HTASM)

even size $2l = 6$

$$\begin{pmatrix} \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & - & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & - & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \end{pmatrix}$$

ASM invariant under a half-turn (HTASM)

even size $2l = 6$

$$\begin{pmatrix} \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & - & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & - & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \end{pmatrix}$$

odd size $2l + 1 = 5$

$$\begin{pmatrix} \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & - & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \end{pmatrix}$$

ASM invariant under a quarter-turn (QTASM)

ASM invariant under a quarter-turn (QTASM)

size $4l = 8$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & - & + \\ + & - & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

ASM invariant under a quarter-turn (QTASM)

size $4l = 8$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & - & + \\ + & - & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

size $4l + 1 = 5$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

ASM invariant under a quarter-turn (QTASM)

size $4l = 8$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & - & + \\ + & - & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

size $4l + 1 = 5$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

size $4l - 1 = 7$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & - & + & - & + & - & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

ASM invariant under a quarter-turn (QTASM)

size $4l = 8$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & - & + \\ + & - & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

size $4l + 2 ??$

size $4l + 1 = 5$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

size $4l - 1 = 7$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & - & + & - & + & - & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Enumeration of ASM's

Enumeration of ASM's

Theorem (Zeilberger – Kuperberg)

The numbers of ASM's, HTASM's and QTASM's are respectively given by:

$$A(l) = (-3)^{\binom{l}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq l} \frac{3(j-i) + 1}{j-i+l},$$

$$A_{HT}(2l) = A(l) \times (-3)^{\binom{l}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq l} \frac{3(j-i) + 2}{j-i+l},$$

$$A_{QT}(4l) = A(l)^2 \times A_{HT}(2l).$$

Enumeration of QTASM's

Enumeration of QTASM's

$$A_{QT}(4l) = A(l)^2 \times A_{HT}(2l)$$

$$A_{QT}(4l - 1) = A(l)^2 \times A_{HT}(2l - 1)$$

$$A_{QT}(4l + 1) = A(l)^2 \times A_{HT}(2l + 1)$$

$$A_{QT}(4l + 2) = 0$$

(quasi-)QTASM of size $4l + 2$

(quasi-)QTASM of size $4l + 2$

taille $4l + 2 = 6$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & - & + & \cdot \\ \cdot & + & - & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & - & + \\ + & - & \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Enumeration of QTASM's

$$A_{QT}(4l) = A(l)^2 \times A_{HT}(2l)$$

$$A_{QT}(4l - 1) = A(l)^2 \times A_{HT}(2l - 1)$$

$$A_{QT}(4l + 1) = A(l)^2 \times A_{HT}(2l + 1)$$

$$A_{QT}(4l + 2) = 0$$

Enumeration of QTASM's

$$A_{QT}(4l) = A(l)^2 \times A_{HT}(2l)$$

$$A_{QT}(4l - 1) = A(l)^2 \times A_{HT}(2l - 1)$$

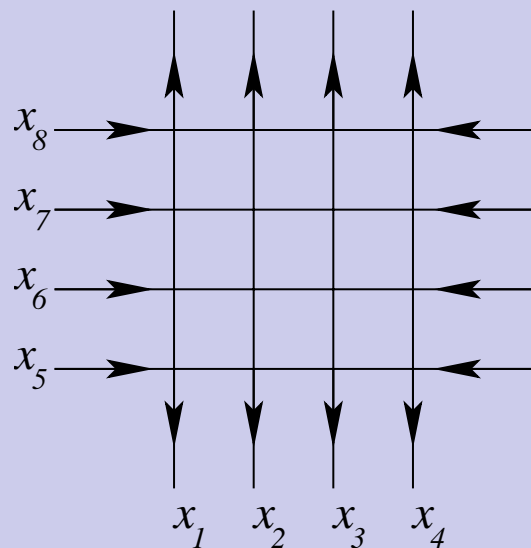
$$A_{QT}(4l + 1) = A(l)^2 \times A_{HT}(2l + 1)$$

$$A_{qQT}(4l + 2) = A(l) \times A(l + 1) \times A_{HT}(2l + 1)$$

Square ice

Square ice

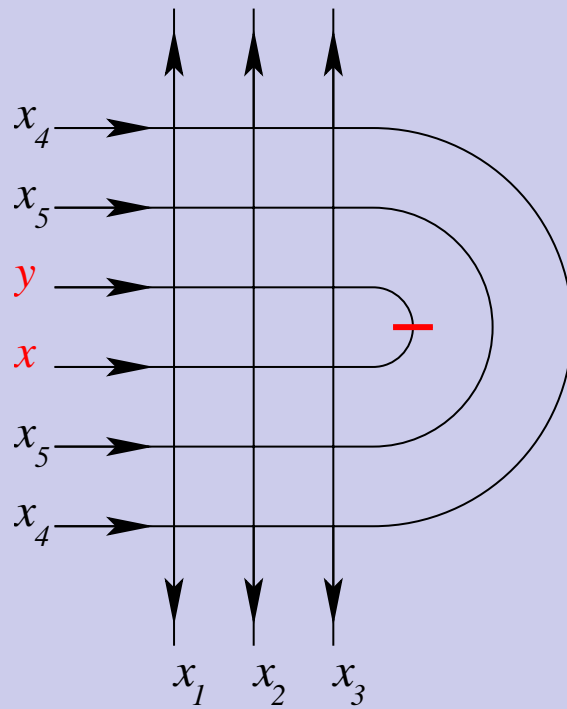
ASM de taille $l = 4$



Glace carrée HTS

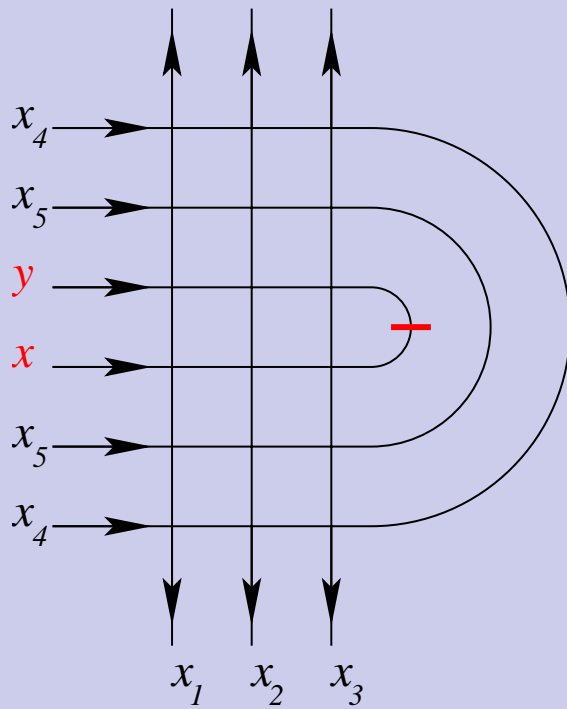
Glace carrée HTS

HTASM de taille $2l = 6$

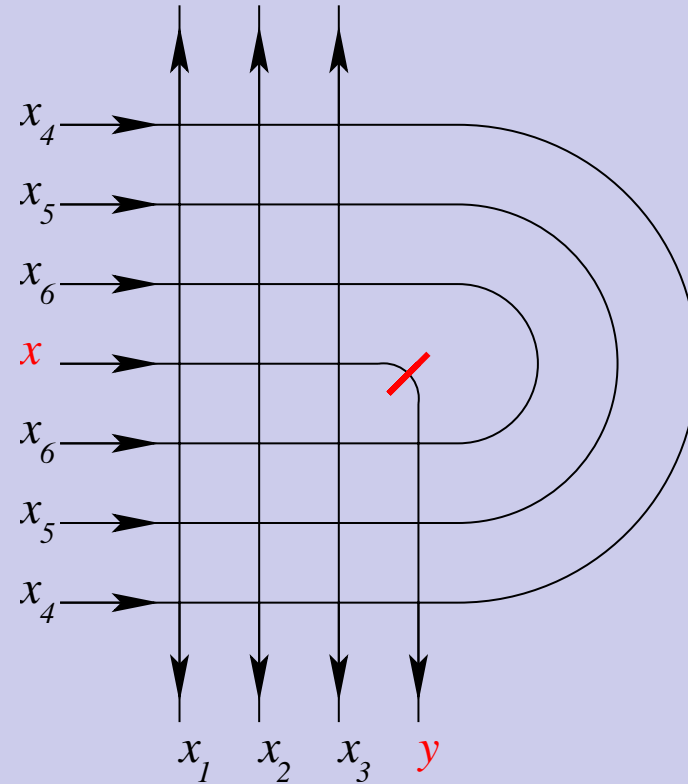


Glace carrée HTS

HTASM de taille $2l = 6$



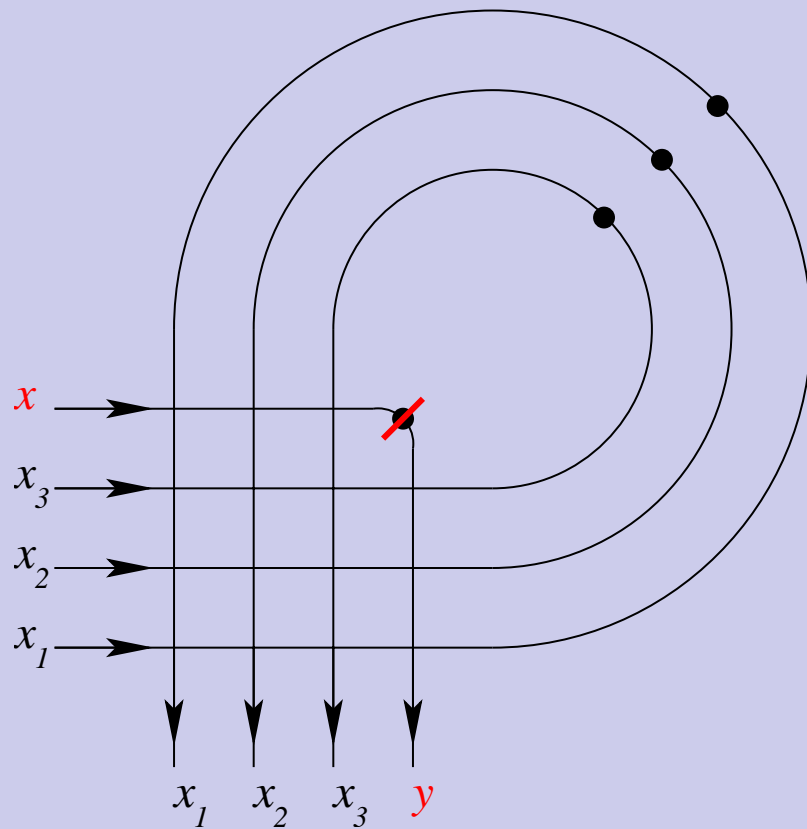
HTASM de taille $2l + 1 = 7$



Glace carrée QTS

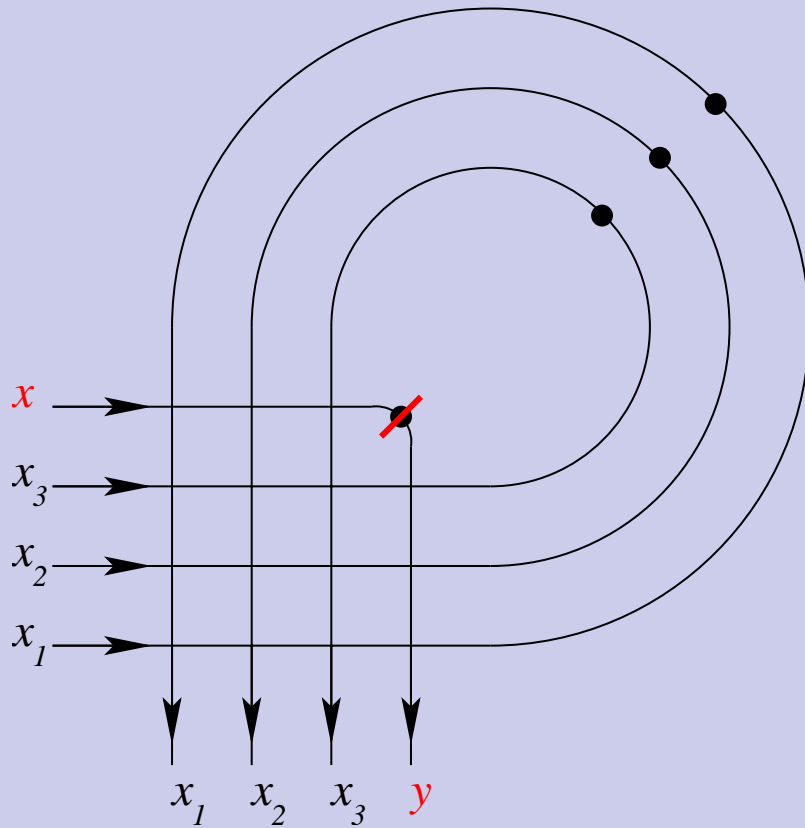
Glace carrée QTS

QTASM de taille $4l = 8$

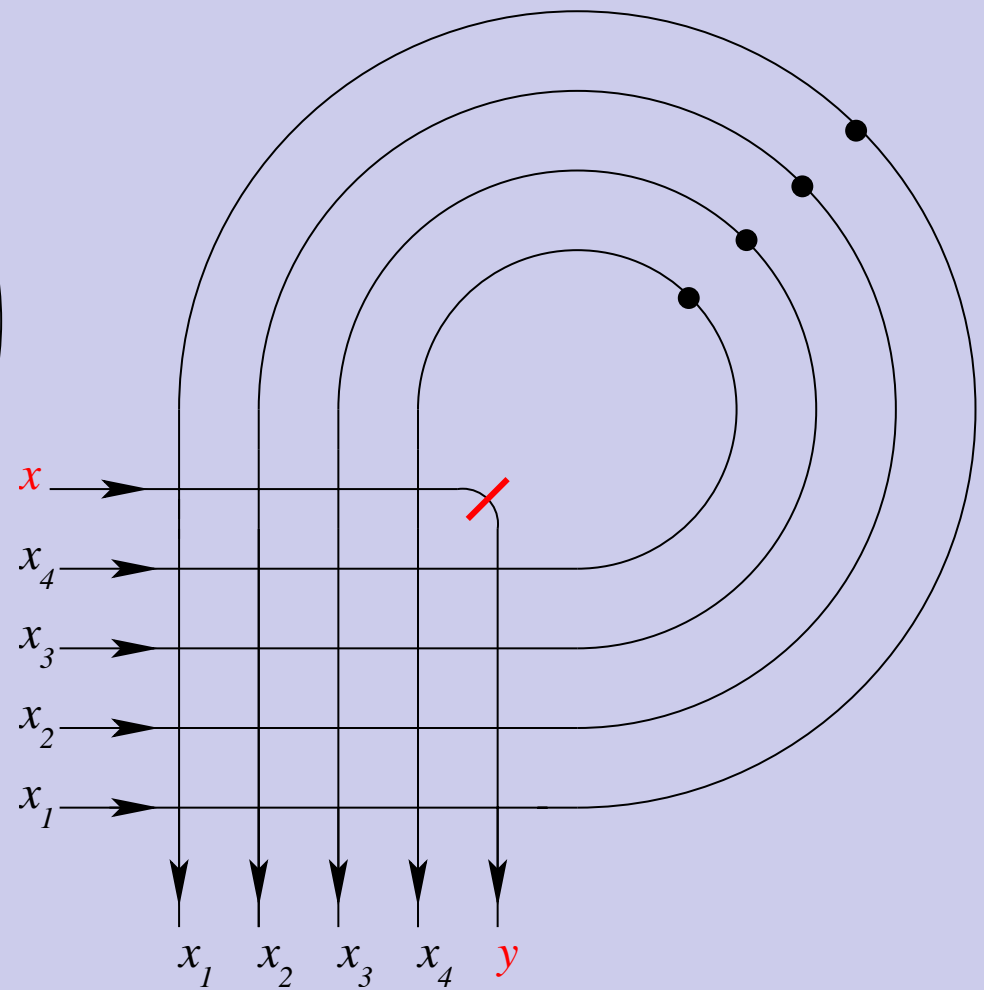


Glace carrée QTS

QTASM de taille $4l = 8$



qQTASM de taille $4l + 2 = 10$



Résultat principal

Résultat principal

Théorème

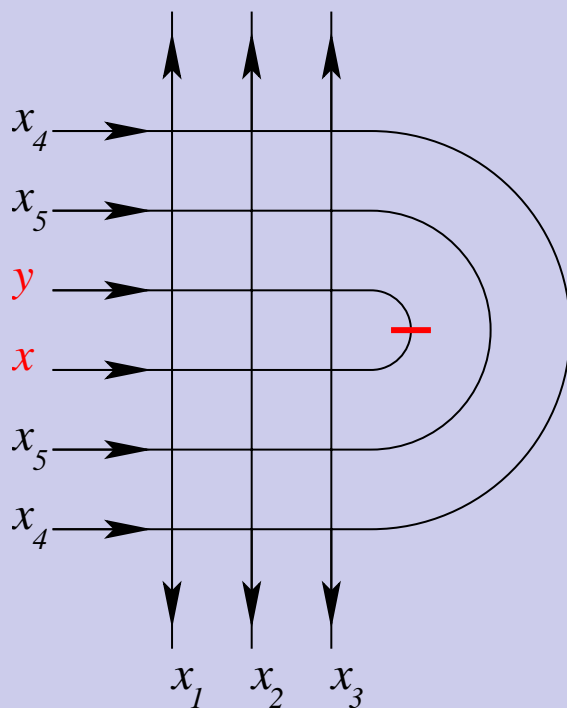
Pour $a = e^{i\pi/3}$, les fonctions de partition des modèles précédents sont reliés par :

$$Z_{QT}(4l; X_{2l-1}, (x, y)) = \sigma(a)^{-1} Z(l; X_{2l-1}, x) Z(l; X_{2l-1}, y) Z_{HT}(2l; X_{2l-1}, (x, y)),$$
$$Z_{QT}(4l + 2; X_{2l}, (x, y)) = \sigma(a)^{-1} Z(l; X_{2l}) Z(l + 1; X_{2l}, x, y) Z_{HT}(2l + 1; X_{2l}, (x, y)).$$

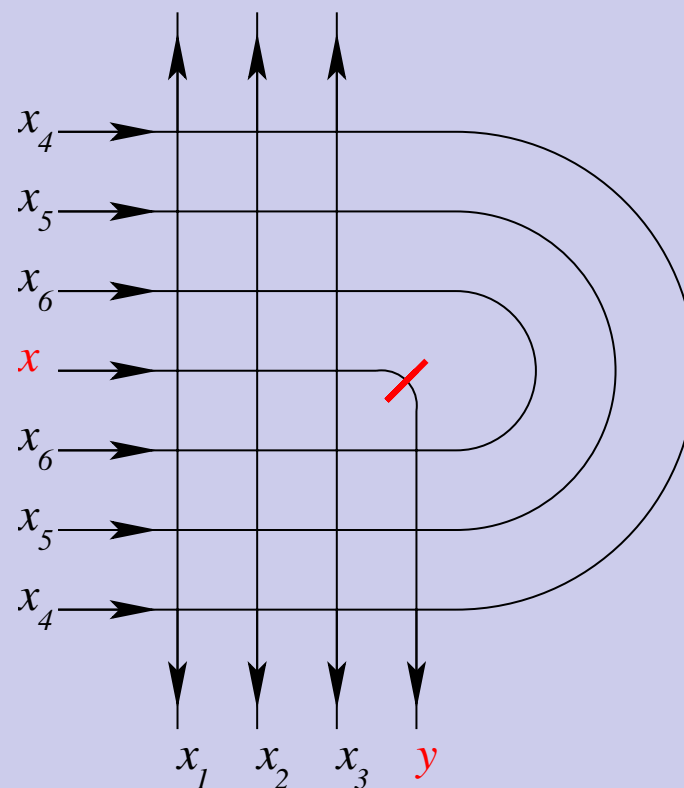
Coupons la glace en deux - HTS

Coupons la glace en deux - HTS

HTASM de taille $2l = 6$



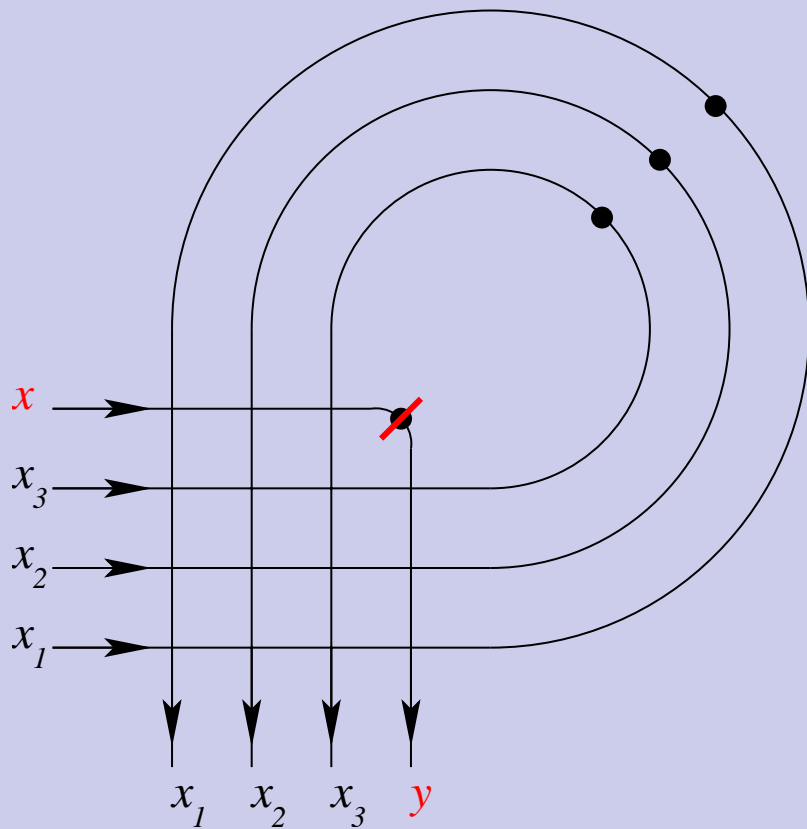
HTASM de taille $2l + 1 = 7$



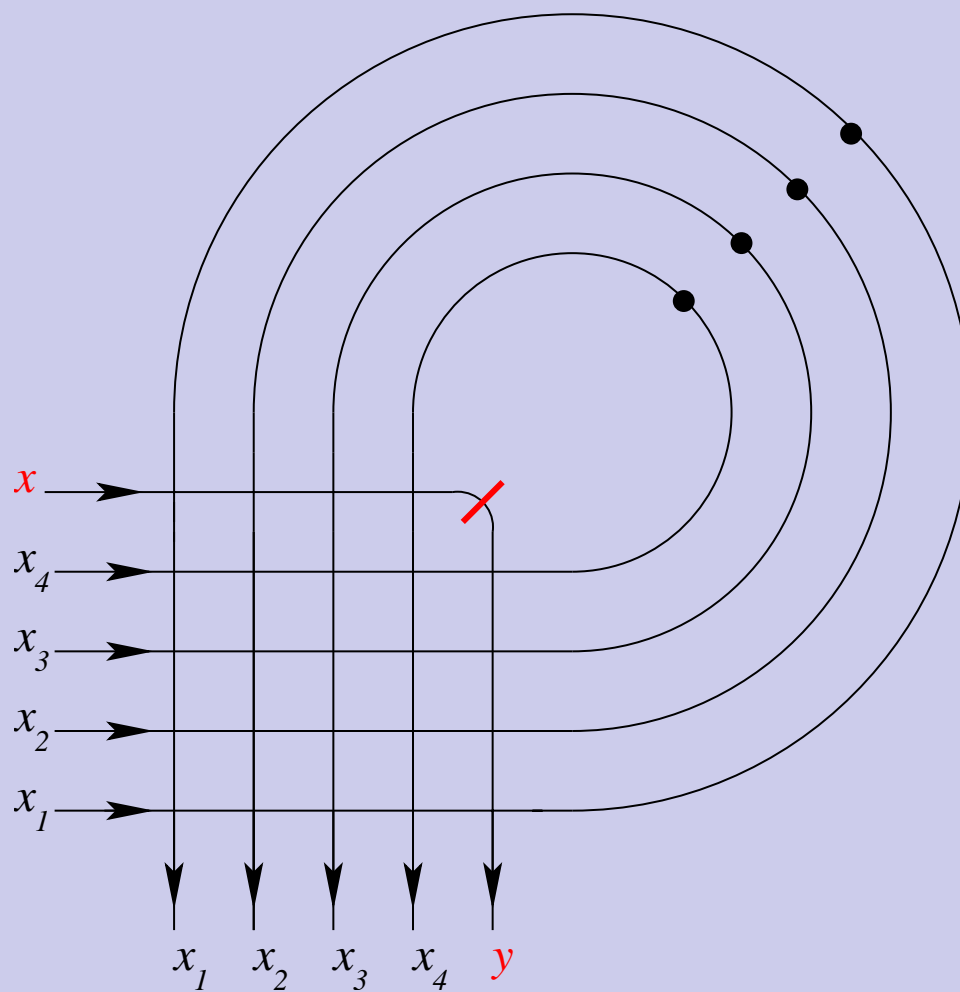
Coupons la glace en deux - QTS

Coupons la glace en deux - QTS

QTASM de taille $4l = 8$



qQTASM de taille $4l + 2 = 10$



Ce qu'on va montrer

Ce qu'on va montrer

Pour $a = e^{i\pi/3}$, les (demi-)fonctions de partition des modèles précédents sont reliés par :

$$Z_{QT}^+(4l; X_{2l-1}, (x, y)) = \sigma(a)^{-1} Z(l; X_{2l-1}, x) Z(l; X_{2l-1}, y) Z_{HT}^+(2l; X_{2l-1}, (x, y)),$$

$$Z_{QT}^-(4l; X_{2l-1}, (x, y)) = \sigma(a)^{-1} Z(l; X_{2l-1}, x) Z(l; X_{2l-1}, y) Z_{HT}^-(2l; X_{2l-1}, (x, y)),$$

$$Z_{QT}^+(4l + 2; X_{2l}, (x, y)) = \sigma(a)^{-1} Z(l; X_{2l}) Z(l + 1; X_{2l}, x, y) Z_{HT}^+(2l + 1; X_{2l}, (x, y)),$$

$$Z_{QT}^-(4l + 2; X_{2l}, (x, y)) = \sigma(a)^{-1} Z(l; X_{2l}) Z(l + 1; X_{2l}, x, y) Z_{HT}^-(2l + 1; X_{2l}, (x, y)).$$

Preuve (1/5) : largeurs des polynômes de Laurent

Preuve (1/5) : largeurs des polynômes de Laurent

Toutes les fonctions de partition considérées sont des polynômes de Laurent en x pairs ou impairs,

Preuve (1/5) : largeurs des polynômes de Laurent

Toutes les fonctions de partition considérées sont des polynômes de Laurent en x pairs ou impairs, et leur (demi-)largeur est :

- pour L_1^+ et R_1^+ : $2l - 2$,
- pour L_1^- et R_1^- : $2l - 1$,
- pour L_2^+ et R_2^+ : $2l - 1$,
- pour L_2^- et R_2^- : $2l$.

Preuve (2/5) : symétries

Preuve (2/5) : symétries

Propriété 1 :

Toutes les fonctions de partition considérées sont symétriques en leurs variables (x_1, \dots, x_l) .

Preuve (2/5) : symétries

Propriété 1 :

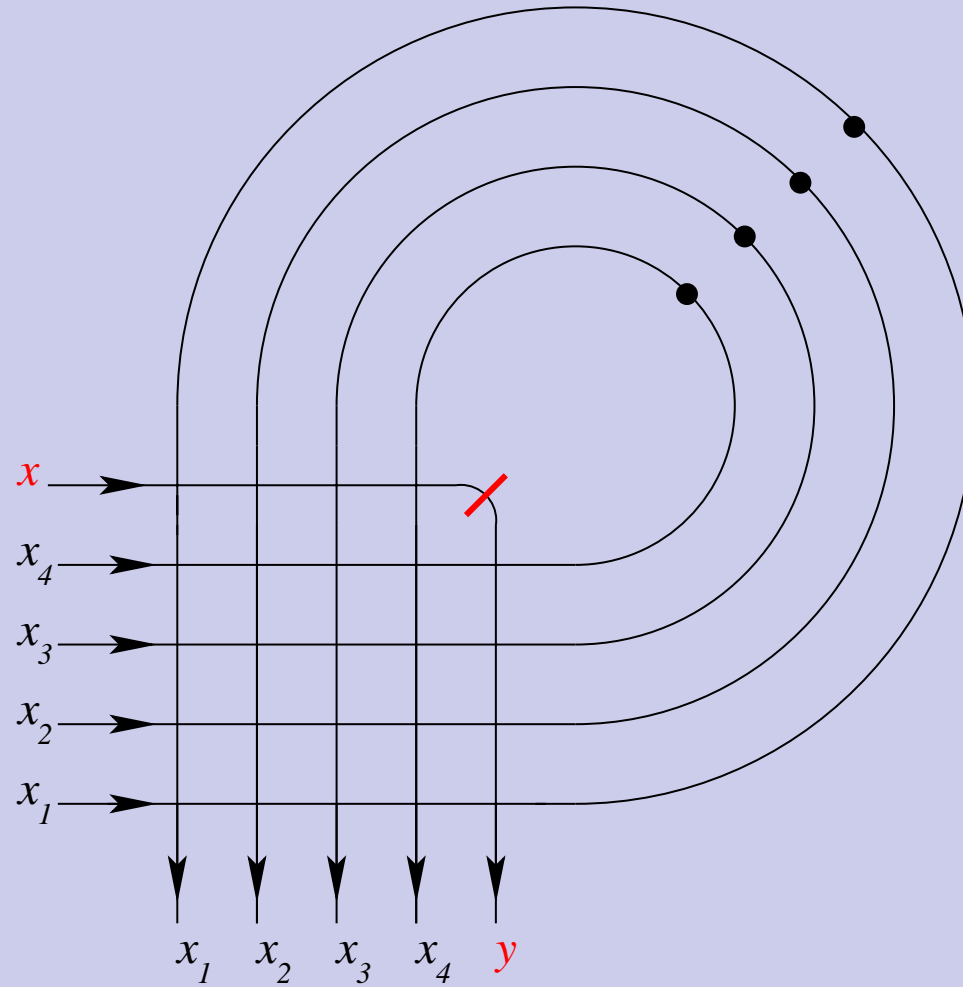
Toutes les fonctions de partition considérées sont symétriques en leurs variables (x_1, \dots, x_l) .

Propriété 2 :

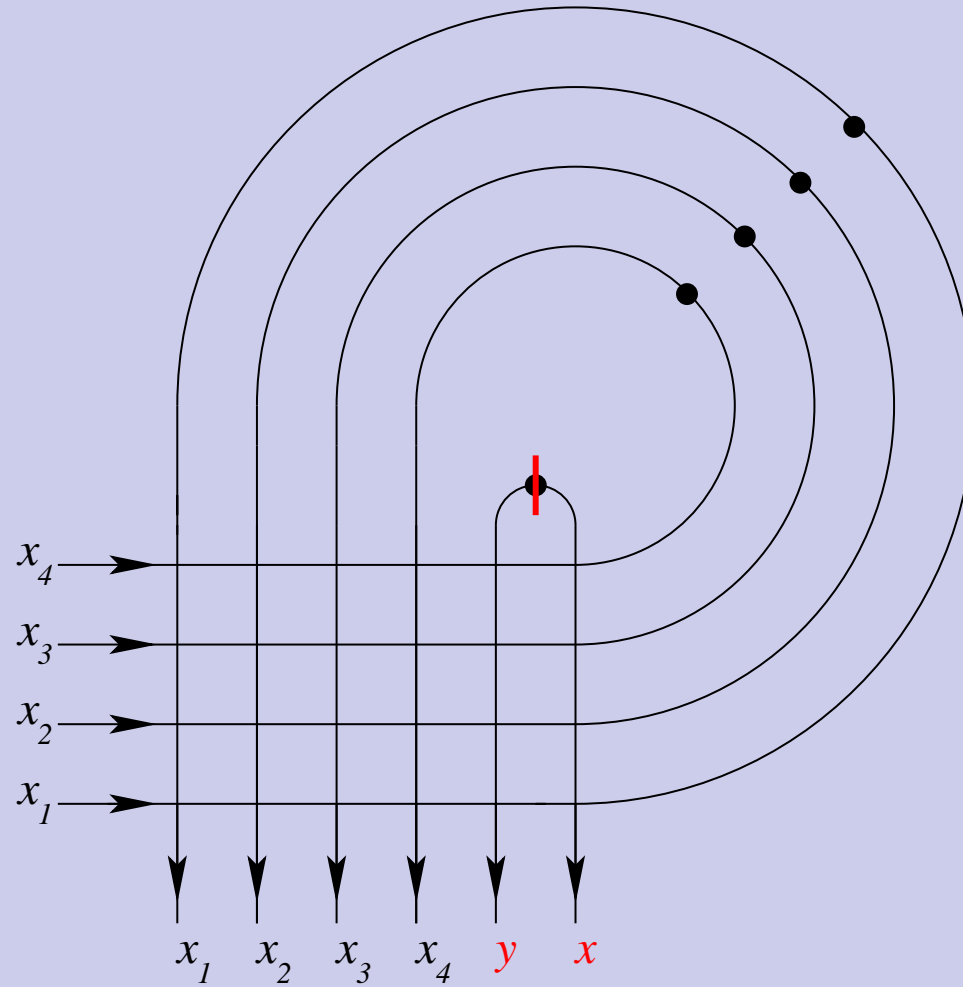
$Z_{QT}^{+,-}(4l + 2; X_{2l}, (x, y))$ et $Z_{HT}^{+,-}(2l + 1; X_{2l}, (x, y))$ sont symétriques en (x, y) .

Symétrie en (x, y)

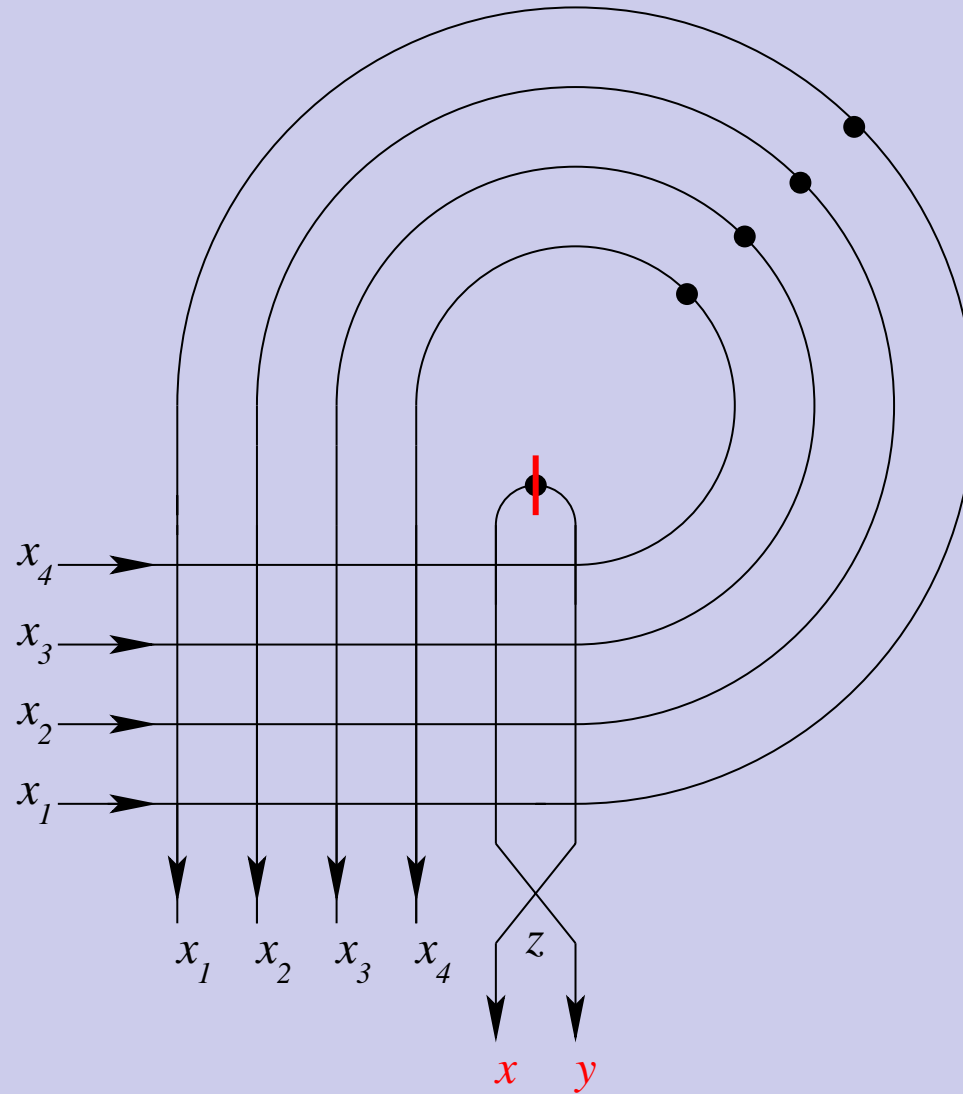
Symétrie en (x, y)



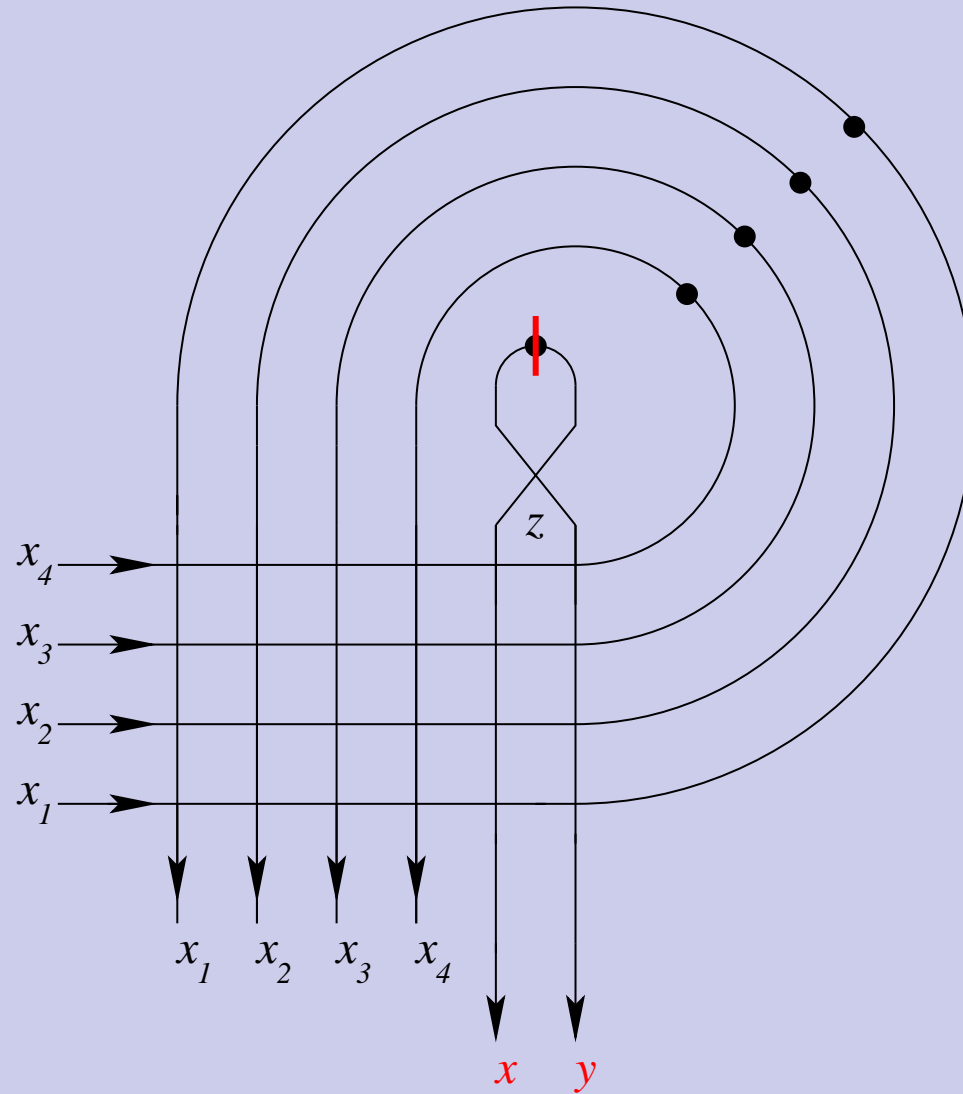
Symétrie en (x, y)



Symétrie en (x, y)



Symétrie en (x, y)



Preuve (2/5) : symétries

Propriété 1 :

Toutes les fonctions de partition considérées sont symétriques en leurs variables (x_1, \dots, x_l) .

Propriété 2 :

$Z_{QT}^{+,-}(4l + 2; X_{2l}, (x, y))$ et $Z_{HT}^{+,-}(2l + 1; X_{2l}, (x, y))$ sont symétriques en (x, y) .

Preuve (2/5) : symétries

Propriété 1 :

Toutes les fonctions de partition considérées sont symétriques en leurs variables (x_1, \dots, x_l) .

Propriété 2 :

$Z_{QT}^{+,-}(4l + 2; X_{2l}, (x, y))$ et $Z_{HT}^{+,-}(2l + 1; X_{2l}, (x, y))$ sont symétriques en (x, y) .

Propriété 3 :

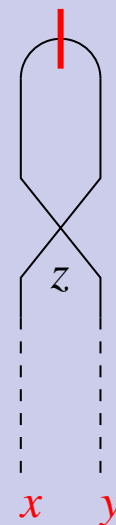
$Z_{QT}^{+,-}(4l; X_{2l-1}, (x, y))$ et $Z_{HT}^{+,-}(2l; X_{2l-1}, (x, y))$ vérifient l'équation fonctionnelle :

$$F^{+,-}(x, y)\sigma(a^2 y \bar{x}) = F^{+,-}(y, x)\sigma(a^2) + F^{-,+}(y, x)\sigma(x \bar{y}).$$

Pseudo-symétrie en (x, y)

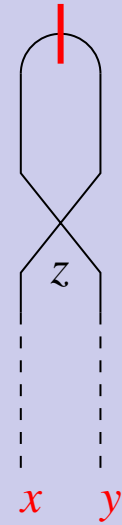
Pseudo-symétrie en (x, y)

Dans le cas de F^+ : le nœud supplémentaire

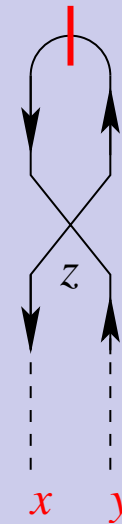


Pseudo-symétrie en (x, y)

Dans le cas de F^+ : le nœud supplémentaire

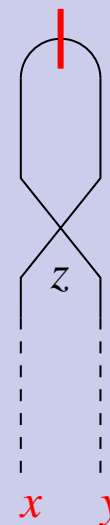


peut avoir deux orientations :

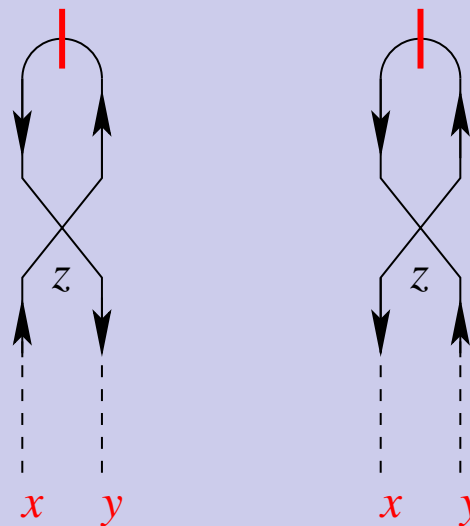


Pseudo-symétrie en (x, y)

Dans le cas de F^+ : le nœud supplémentaire



peut avoir deux orientations :



ce qui donne précisément :

$$F^{+,-}(x, y)\sigma(a^2 y \bar{x}) = F^{+,-}(y, x)\sigma(a^2) + F^{-,+}(y, x)\sigma(x \bar{y}).$$

Preuve (2/5) : symétries

Propriété 1 :

Toutes les fonctions de partition considérées sont symétriques en leurs variables (x_1, \dots, x_l) .

Propriété 2 :

$Z_{QT}^{+,-}(4l + 2; X_{2l}, (x, y))$ et $Z_{HT}^{+,-}(2l + 1; X_{2l}, (x, y))$ sont symétriques en (x, y) .

Propriété 3 :

$Z_{QT}^{+,-}(4l; X_{2l-1}, (x, y))$ et $Z_{HT}^{+,-}(2l; X_{2l-1}, (x, y))$ vérifient l'équation fonctionnelle :

$$F^{+,-}(x, y)\sigma(a^2 y \bar{x}) = F^{+,-}(y, x)\sigma(a^2) + F^{-,+}(y, x)\sigma(x \bar{y}).$$

Preuve(3/5) : spécialisations

Preuve(3/5) : spécialisations

$$\begin{aligned} Z(l; X_{2l-1}, ax_1) &= \sigma(a^2) \prod_{k=2}^l \sigma(a^2 x_1 \bar{x}_k) \prod_{k=l+1}^{2l-1} \sigma(ax_k \bar{x}_1) \\ &\quad \times Z(l-1; X_{2l-1} \setminus x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(l; X_{2l-1}, \bar{a}x_1) &= \sigma(a^2) \prod_{k=2}^l \sigma(a^2 x_k \bar{x}_1) \prod_{k=l+1}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k) \\ &\quad \times Z(l-1; X_{2l-1} \setminus x_1) \end{aligned}$$

Preuve(3/5) : spécialisations

$$\begin{aligned}
 Z_{HT}^{+,-}(2l; X_{2l-1}, (\bar{a}x_1, \mathbf{y})) &= \sigma(a^2)\sigma(ax_1\bar{y}) \prod_{k=2}^l \sigma(a^2x_k\bar{x}_1) \prod_{k=l+1}^{2l-1} \sigma(ax_1\bar{x}_k) \\
 &\times Z_{HT}^{+,-}(2l-1; X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{HT}^{+,-}(2l; X_{2l-1}, (\mathbf{x}, ax_1)) &= \sigma(a^2)\sigma(ax\bar{x}_1) \prod_{k=2}^l \sigma(ax_k\bar{x}_1) \prod_{k=l+1}^{2l-1} \sigma(a^2x_1\bar{x}_k) \\
 &\times Z_{HT}^{+,-}(2l-1; X_{2l-1} \setminus x_1, (x_1, \mathbf{x}))
 \end{aligned}$$

Preuve(3/5) : spécialisations

$$\begin{aligned} Z_{HT}^{+,-}(2l+1; X_{2l}, (\bar{a}x_1, \mathbf{y})) &= \sigma(a^2) \prod_{k=1}^l \sigma(a^2 x_k \bar{x}_1) \prod_{k=l+1}^{2l} \sigma(ax_1 \bar{x}_k) \\ &\times Z_{HT}^{+,-}(2l; X_{2l} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{HT}^{+,-}(2l+1; X_{2l}, (ax_1, \mathbf{y})) &= \sigma(a^2) \prod_{k=2}^l \sigma(a^2 x_1 \bar{x}_k) \prod_{k=l+1}^{2l} \sigma(ax_k \bar{x}_1) \\ &\times Z_{HT}^{+,-}(2l; X_{2l} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \end{aligned}$$

Preuve(3/5) : spécialisations

$$\begin{aligned} Z_{QT}^{+,-}(4l; X_{2l-1}, (\bar{a}x_1, \mathbf{y})) &= \sigma(a)\sigma(a^2)\sigma(ax_i\bar{y}) \left(\prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(a^2 x_k \bar{x}_1) \sigma(ax_1 \bar{x}_k) \right) \\ &\times Z_{QT}^{+,-}(4(l-1); X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{QT}^{+,-}(4l; X_{2l-1}, (x, ax_1)) &= \sigma(a)\sigma(a^2)\sigma(ax\bar{x}_i) \left(\prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(a^2 x_1 \bar{x}_k) \sigma(ax_k \bar{x}_1) \right) \\ &\times Z_{QT}^{+,-}(4(l-1); X_{2l-1} \setminus x_1, (x_1, \mathbf{x})) \end{aligned}$$

Preuve(3/5) : spécialisations

$$\begin{aligned} Z_{QT}^{+,-}(4l+2; X_{2l}, (\bar{a}x_1, \mathbf{y})) &= \sigma(a)\sigma(a^2)\sigma(ax_i\bar{y}) \left(\prod_{k=2}^{2l} \sigma(a^2x_k\bar{x}_1)\sigma(ax_1\bar{x}_k) \right) \\ &\times Z_{QT}^{+,-}(4l-2; X_{2l}\setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{QT}^{+,-}(4l+2; X_{2l}, (x, ax_1)) &= \sigma(a)\sigma(a^2)\sigma(ax\bar{x}_i) \left(\prod_{k=2}^{2l} \sigma(a^2x_1\bar{x}_k)\sigma(ax_k\bar{x}_1) \right) \\ &\times Z_{QT}^{+,-}(4l-2; X_{2l}\setminus x_1, (x_1, \mathbf{x})) \end{aligned}$$

Preuve (3/5) : spécialisation supplémentaire

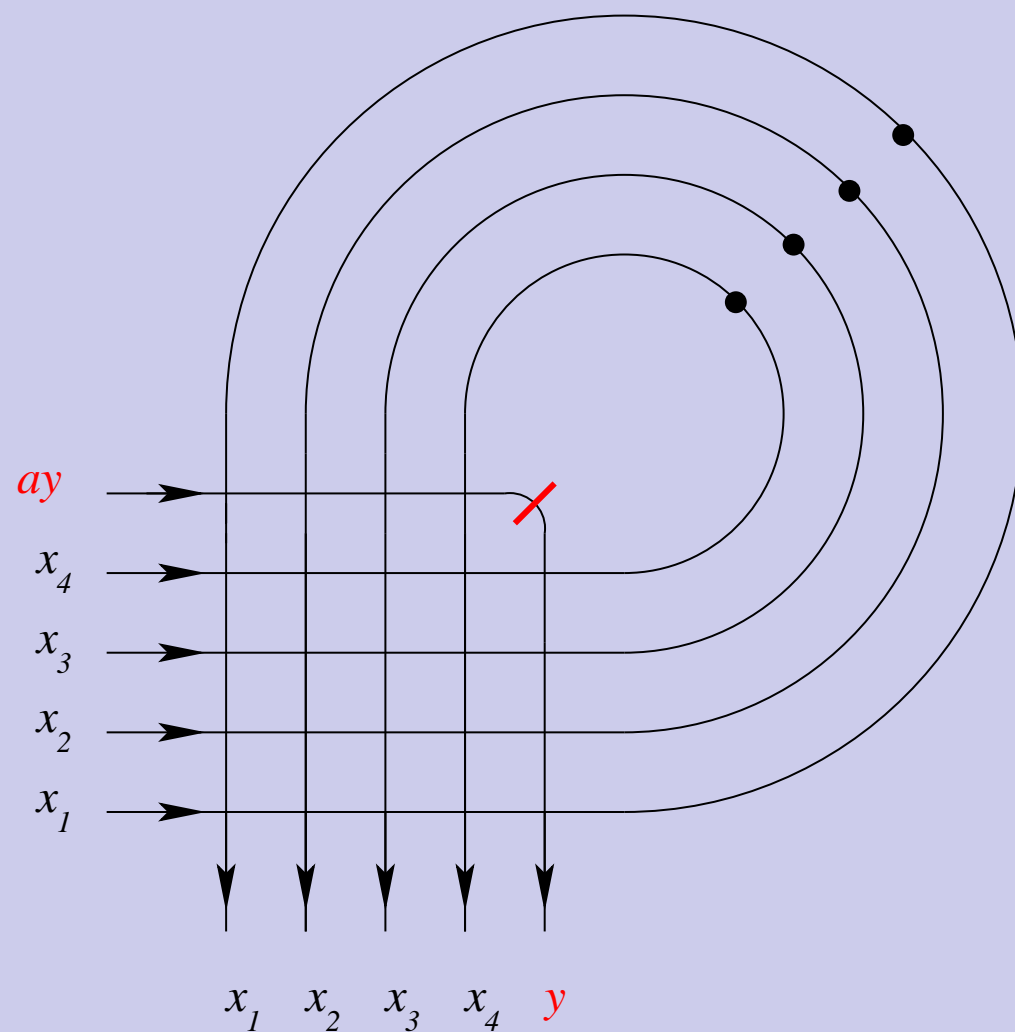
Preuve (3/5) : spécialisation supplémentaire

$$Z_{QT}(4l + 2; X_{2l}, (ay, y)) = \sigma(a) \left(\prod_{k=1}^{2l} \sigma(a^2 y \bar{x}_k) \sigma(ax_k \bar{y}) \right) \\ \times Z_{QT}(4l; X_{2l} \setminus x_{2l}, (x_{2l}, x_{2l}))$$

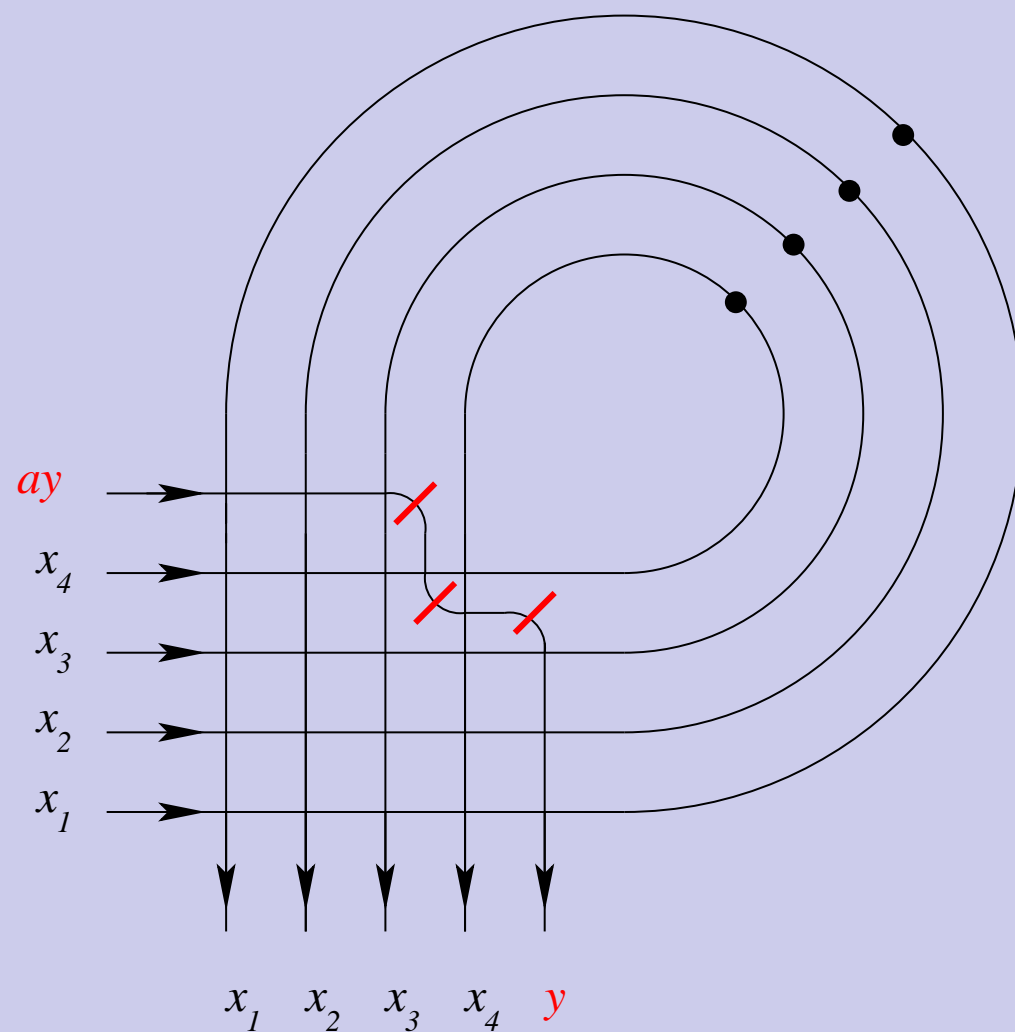
$$Z_{HT}(2l + 1; X_{2l}, (ay, y)) = \prod_{k=1}^l \sigma(a^2 y \bar{x}_k) \prod_{k=l+1}^{2l} \sigma(ax_k \bar{y}) \\ \times Z_{HT}(2l; X_{2l} \setminus x_{2l}, (x_{2l}, x_{2l}))$$

Spécialisation supplémentaire

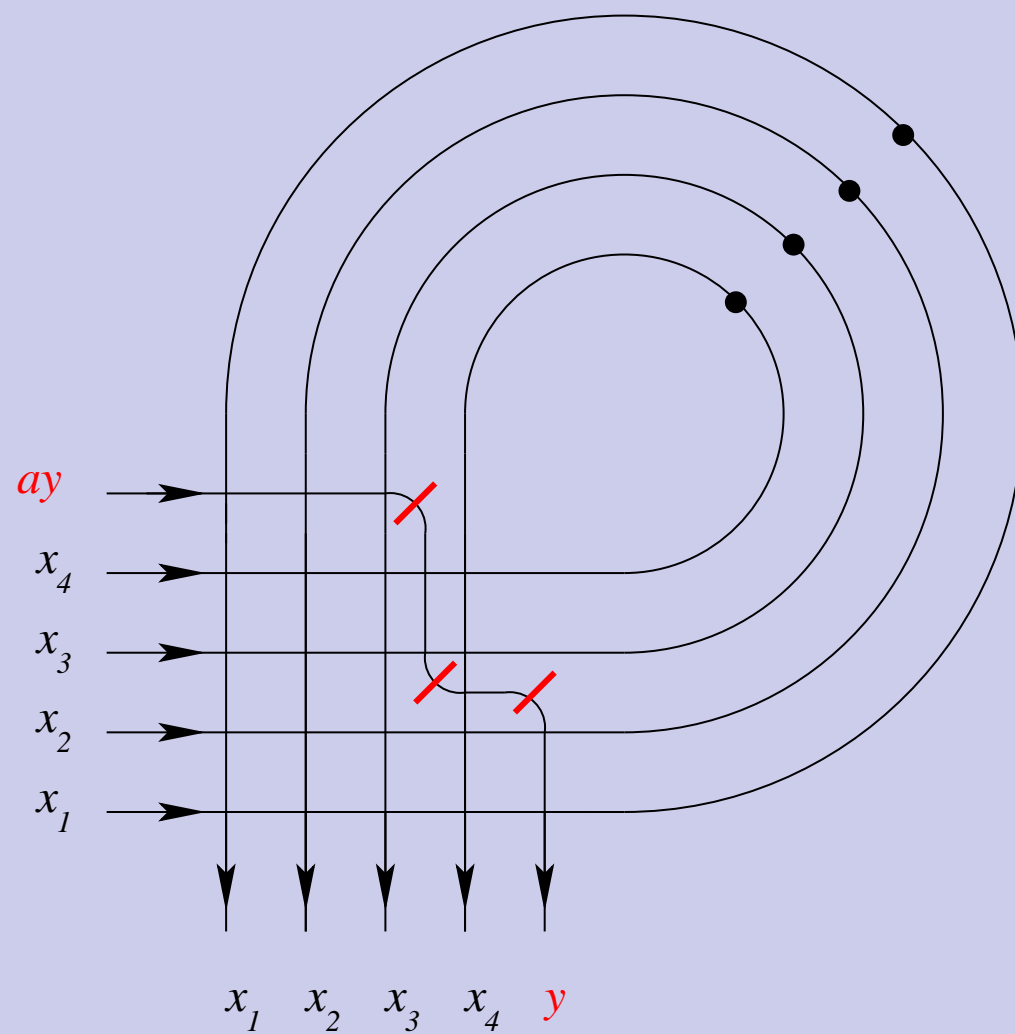
Spécialisation supplémentaire



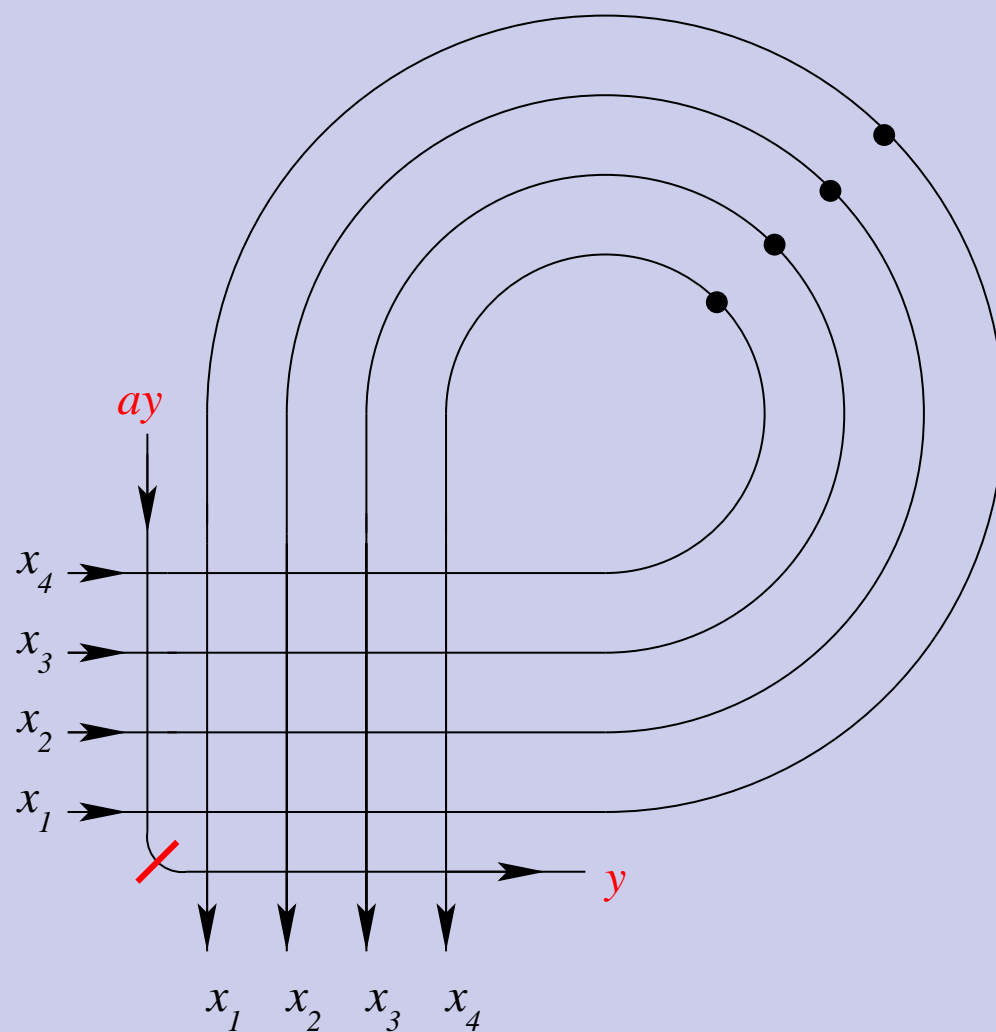
Spécialisation supplémentaire



Spécialisation supplémentaire



Spécialisation supplémentaire



Preuve (3/5) : spécialisation supplémentaire

$$Z_{QT}(4l + 2; X_{2l}, (ay, y)) = \sigma(a) \left(\prod_{k=1}^{2l} \sigma(a^2 y \bar{x}_k) \sigma(ax_k \bar{y}) \right) \\ \times Z_{QT}(4l; X_{2l} \setminus x_{2l}, (x_{2l}, x_{2l}))$$

$$Z_{HT}(2l + 1; X_{2l}, (ay, y)) = \prod_{k=1}^l \sigma(a^2 y \bar{x}_k) \prod_{k=l+1}^{2l} \sigma(ax_k \bar{y}) \\ \times Z_{HT}(2l; X_{2l} \setminus x_{2l}, (x_{2l}, x_{2l}))$$

Preuve (4/5) : $a = e^{i\pi/3}$

Preuve (4/5) : $a = e^{i\pi/3}$

Théorème (Stroganov) :

Pour $a = e^{i\pi/3}$, Z est symétrique en **toutes** ses variables.

Preuve (5/5) : conclusion

Preuve (5/5) : conclusion

Nous voulons montrer que :

- L_1^+ et R_1^+ coïncident en $2l - 1$ spécialisations,
- L_1^- et R_1^- coïncident en $2l$ spécialisations,
- L_2^+ et R_2^+ coïncident en $2l$ spécialisations,
- L_2^- et R_2^- coïncident en $2l + 1$ spécialisations.

Preuve (5/5) : conclusion

Preuve (5/5) : conclusion

L_1^+ et R_1^+ coïncident en $x = \bar{a}x_1$:

Preuve (5/5) : conclusion

L_1^+ et R_1^+ coïncident en $x = \bar{a}x_1$:

$$Z_{QT}^+(4l; X_{2l-1}, (\bar{a}x_1, y)) = \\ \sigma(a)^2 \sigma(ax_i \bar{y}) \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k)^2 Z_{QT}^+(4l - 2; X_{2l-1} \setminus x_1, (y, x_1))$$

Preuve (5/5) : conclusion

L_1^+ et R_1^+ coïncident en $x = \bar{a}x_1$:

$$\begin{aligned} Z_{QT}^+(4l; X_{2l-1}, (\bar{a}x_1, \mathbf{y})) &= \\ \sigma(a)^2 \sigma(ax_i \bar{y}) \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k)^2 Z_{QT}^+(4l-2; X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \\ &= \sigma(a)^{-1} \sigma(a)^2 \sigma(ax_i \bar{y}) \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k)^2 \\ &\times Z(l-1; X_{2l-1} \setminus x_1) Z(l; X_{2l-1} \setminus x_1, \mathbf{y}, x_1) Z_{HT}^+(2l-1; X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \end{aligned}$$

Preuve (5/5) : conclusion

L_1^+ et R_1^+ coïncident en $x = \bar{a}x_1$:

$$\begin{aligned} Z_{QT}^+(4l; X_{2l-1}, (\bar{a}x_1, \mathbf{y})) &= \\ \sigma(a)^2 \sigma(ax_i \bar{y}) \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k)^2 Z_{QT}^+(4l-2; X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) & \\ = \sigma(a)^{-1} \sigma(a)^2 \sigma(ax_i \bar{y}) \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k)^2 & \\ \times Z(l-1; X_{2l-1} \setminus x_1) Z(l; X_{2l-1} \setminus x_1, \mathbf{y}, x_1) Z_{HT}^+(2l-1; X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) & \\ = \sigma(a)^{-1} \sigma(a)^2 \sigma(ax_i \bar{y}) \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k)^2 & \\ \times Z(l-1; X_{2l-1} \setminus x_1) Z(l; X_{2l-1}, \mathbf{y}) Z_{HT}^+(2l-1; X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) & \end{aligned}$$

Preuve (5/5) : conclusion

L_1^+ et R_1^+ coïncident en $x = \bar{a}x_1$:

$$\begin{aligned}
 & Z_{QT}^+(4l; X_{2l-1}, (\bar{a}x_1, \mathbf{y})) = \\
 & \sigma(a)^2 \sigma(ax_i \bar{y}) \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k)^2 Z_{QT}^+(4l-2; X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \\
 & = \sigma(a)^{-1} \sigma(a)^2 \sigma(ax_i \bar{y}) \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k)^2 \\
 & \times Z(l-1; X_{2l-1} \setminus x_1) Z(l; X_{2l-1} \setminus x_1, \mathbf{y}, x_1) Z_{HT}^+(2l-1; X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \\
 & = \sigma(a)^{-1} \sigma(a)^2 \sigma(ax_i \bar{y}) \prod_{k=2}^{2l-1} \sigma(ax_1 \bar{x}_k)^2 \\
 & \times Z(l-1; X_{2l-1} \setminus x_1) Z(l; X_{2l-1}, \mathbf{y}) Z_{HT}^+(2l-1; X_{2l-1} \setminus x_1, (\mathbf{y}, x_1)) \\
 & = \sigma(a)^{-1} Z(l; X_{2l-1}, \bar{a}x_1) Z(l; X_{2l-1}, \mathbf{y}) Z_{HT}^+(2l; X_{2l-1}, (\bar{a}x_1, \mathbf{y})).
 \end{aligned}$$

Preuve (5/5) : conclusion

L_1^+ et R_1^+ coïncident en $x = \bar{a}x_1$.

Preuve (5/5) : conclusion

L_1^+ et R_1^+ coïncident en $x = \bar{a}x_1$.

De même :

L_1^- et R_1^- coïncident en $x = \bar{a}x_1$.

L_1^+ et R_1^+ coïncident en $y = ax_1$.

L_1^- et R_1^- coïncident en $y = ax_1$.

On déduit :

L_1^+ et R_1^+ coïncident en $x = ax_1$.

L_1^- et R_1^- coïncident en $x = ax_1$.

Pseudo-symétrie

Pseudo-symétrie

On a :

$$L_1^+(\mathbf{y}, ax_1) = R_1^+(\mathbf{y}, ax_1) \quad \text{and} \quad L_1^-(\mathbf{y}, ax_1) = R_1^-(\mathbf{y}, ax_1),$$

d'où :

$$\begin{aligned} L_1^+(ax_1, \mathbf{y}) &= \frac{\sigma(a^2)L_1^+(\mathbf{y}, ax_1) + \sigma(ax_1\bar{y})L_1^-(\mathbf{y}, ax_1)}{\sigma(ay\bar{x}_1)} \\ &= \frac{\sigma(a^2)R_1^+(\mathbf{y}, ax_1) + \sigma(ax_1\bar{y})R_1^-(\mathbf{y}, ax_1)}{\sigma(ay\bar{x}_1)} \\ &= R_1^+(ax_1, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Preuve (5/5) : conclusion

L_1^+ et R_1^+ coïncident en $x = \bar{a}x_1$.

De même :

L_1^- et R_1^- coïncident en $x = \bar{a}x_1$.

L_1^+ et R_1^+ coïncident en $y = ax_1$.

L_1^- et R_1^- coïncident en $y = ax_1$.

On déduit :

L_1^+ et R_1^+ coïncident en $x = ax_1$.

L_1^- et R_1^- coïncident en $x = ax_1$.

Preuve (5/5) : conclusion

L_1^+ et R_1^+ coïncident en $x = \bar{a}x_1$.

De même :

L_1^- et R_1^- coïncident en $x = \bar{a}x_1$.

L_1^+ et R_1^+ coïncident en $y = ax_1$.

L_1^- et R_1^- coïncident en $y = ax_1$.

On déduit :

L_1^+ et R_1^+ coïncident en $x = ax_1$.

L_1^- et R_1^- coïncident en $x = ax_1$.

D'où les égalités : $L_1^+ = R_1^+$ et $L_1^- = R_1^-$.

Preuve (5/5) : conclusion

Preuve (5/5) : conclusion

L_2^+ et R_2^+ coïncident en $x = \bar{a}x_1$.

L_2^- et R_2^- coïncident en $x = \bar{a}x_1$.

L_2^+ et R_2^+ coïncident en $y = ax_1$.

L_2^- et R_2^- coïncident en $y = ax_1$.

On déduit (symétrie (x, y)) :

L_2^+ et R_2^+ coïncident en $x = ax_1$.

L_2^- et R_2^- coïncident en $x = ax_1$.

Preuve (5/5) : conclusion

L_2^+ et R_2^+ coïncident en $x = \bar{a}x_1$.

L_2^- et R_2^- coïncident en $x = \bar{a}x_1$.

L_2^+ et R_2^+ coïncident en $y = ax_1$.

L_2^- et R_2^- coïncident en $y = ax_1$.

On déduit (symétrie (x, y)) :

L_2^+ et R_2^+ coïncident en $x = ax_1$.

L_2^- et R_2^- coïncident en $x = ax_1$.

D'où $L_2^+ = R_2^+$.

Mais il manque **une** spécialisation pour $L_2^- = R_2^-$.

Spécialisation supplémentaire

Spécialisation supplémentaire

On a :

$$\left(L_2^+ + L_2^-\right) = \left(R_2^+ + R_2^-\right) \text{ pour } x = ay.$$

Spécialisation supplémentaire

On a :

$$\left(L_2^+ + L_2^- \right) = \left(R_2^+ + R_2^- \right) \text{ pour } x = ay.$$

Mais on vient de prouver : $L_2^+ = R_2^+$.

Spécialisation supplémentaire

On a :

$$\left(L_2^+ + L_2^- \right) = \left(R_2^+ + R_2^- \right) \text{ pour } x = ay.$$

Mais on vient de prouver : $L_2^+ = R_2^+$.

D'où $L_2^- = R_2^-$ pour $x = ay$.

Spécialisation supplémentaire

On a :

$$\left(L_2^+ + L_2^- \right) = \left(R_2^+ + R_2^- \right) \text{ pour } x = ay.$$

Mais on vient de prouver : $L_2^+ = R_2^+$.

D'où $L_2^- = R_2^-$ pour $x = ay$.

Fin de la preuve.